Z 40/15
v.1 B.2

ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

РЕШЕНИЯ ВСЕХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

К СБОРНИКУ Н. РЫБКИНА

Часть I—ПЛАНИМЕТРИЯ

ВЫПУСК II (ЗАДАЧИ 469—850)

СОСТАВИЛ К. О. ГАН

Приложение: АТЛАС ЧЕРТЕЖЕЙ

КИЕВ — 1929

ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

R 120/52 Z 40/15 Ф 1-64/5063

РЕШЕНИЯ

ВСЕХ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

К СБОРНИКУ Н. РЫБКИНА

ЧАСТЬ I — ПЛАНИМЕТРИЯ

ВЫПУСК II (ЗАДАЧИ 469—850)

СОСТАВИЛ К. О. ГАН

29-1809
ПУБЛ. БИБЛ. имени В. И. ЛЕНИНА С.С.С.Р.

Приложение: АТЛАС ЧЕРТЕЖЕЙ

ИЗДАНИЕ АВТОРА

КИЕВ—1929

Бібліографічний опис та шифри для бібліотечн. каталогів на цю книгу вміщено в Літоп. Укр. Друку та „Картковому реперт." Укр. Книжн. Палати

Трест „Киев-Печать",
8-я типография,
Киев, ул. Л. Толстого, 5.

Киевский Облит 240 1928 1539 10,000

всестр КНИГА ИМЕЕТ И б/о

Листов печатных	Общее колич. вып.	В переплетной ед. соедин. номера вып.	Таблиц	Карт	Иллюстраций	Служебн. номер	Номера списка и порядковый	19 г.
12	1	2 I в II				ц	4/42	

85

Планиметрия.

казание. Нумерация чертежей та же, что и задач.

Пропорциональные линии в круге.

469. а) По теореме: „перпендикуляр, опущенный на диаметр из какой-либо точки окружности, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра", имеем:

1) $h^2 = 12 \cdot 3$, откуда $h = 6$ *см*.

2) $h^2 = 16 \cdot 9$, откуда $h = 12$ *см*.

3) $h^2 = 20 \cdot 5$, откуда $h = 10$ *дм* или 1 *м*.

b) Пусть $AC = 8$ *см*; тогда $BC = 40 - 8 = 32$ *см*. По приведенной теореме, имеем: $CD^2 = AC \cdot BC = 8 \cdot 32$; откуда $CD = \sqrt{8 \cdot 32} = 16$ *см*.

470. По приведенной в зад. 469 теореме, перпендикуляр, восставленный в точке C диаметра до пересечения его с окружностью в точке D, равен $CD = \sqrt{AC \cdot BC} = \sqrt{8 \cdot 50} = 20$ *дм* или 2 *м*. А потому конец более короткого перпендикуляра $CD_1 = 15$ *см* лежит внутри окружности, более длинного — $CD_2 = 23$ *см* — лежит вне окружности.

471. По теореме: „перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между частями диаметра", т.-е., $CD^2 = AD \cdot DB$, имеем:

1) $10^2 = 25 \cdot DB$; откуда $DB = \dfrac{10^2}{25} = 4$.

2) Пусть $AD = 4x$, а $DB = 9x$; тогда $30^2 = 4x \cdot 9x$,

куда $x = \sqrt{\dfrac{30^2}{4 \cdot 9}} = 5$.

Следовательно, $AD = 4x = 20$; $DB = 9x = 45$; $AB = AD + DB = 20 + 45 = 65$.

3) Так как $CD = 3AD$, а $DB = AB - AD = 2r - AD$, то $CD^2 = AD \cdot DB$ перепишется так: $(3AD)^2 = AD(2r - AD)$, или $9AD^2 = 2r \cdot AD - AD^2$, или $10AD^2 = 2r \cdot AD$. Сократив обе части на $2AD$, получим $AD = \dfrac{r}{5}$.

4) Так как $DB = AB - AD$, то равенство $CD^2 = AD \cdot DB$ перепишется так: $CD^2 = AD(AB - AD)$, или $15^2 = AD(50 - AD)$; получаем квадратное ур-ие:

$$AD^2 - 50AD + 225 = 0,$$

откуда $AD = 25 \pm \sqrt{25^2 - 225} = 25 \pm 20$, т.-е., 45 и 5.

472. 1) Пусть $AO = 34$ *см*, $OD = 8x$, $AD = 9x$. Тогда $AB = 2 \cdot 34 = 68$ *см*; $AD + OD = 9x + 8x = 34$ *см*, откуда $x = 2$ *см*, а $AD = 9x = 18$ *см*; $BD = AB - AD = 68 - 18 = 50$ *см*.

По формуле $CD^2 = AD \cdot BD$, имеем: $CD^2 = 18 \cdot 50$ *см*, откуда $CD = \sqrt{18 \cdot 50} = 30$ *см*.

2) Хорда BDC, перпендикулярная к радиусу OA, делится в точке D пополам, т.-е., $BD = \frac{BC}{2}$. Продолжим радиус OA до пересечения с окружностью. Тогда по формуле (принимая во внимание, что AE, как диаметр, равен $2 \cdot 25 = 50$ *см*): $BD^2 = AD \cdot DE$; но $DE = AE - AD = 50 - 10 = 40$ *см*. Следовательно, $BD^2 = 10 \cdot 40$, откуда $BD = 20$ *см*; $BC = 2 \cdot BD = 2 \cdot 20 = 40$ *см*.

3) Пусть $AB = 8$ *дм*, $CD = 40$ *дм*. Обозначим радиус большей окружности через R. Тогда $CA^2 = EA \cdot AB$; но $CA = \frac{CD}{2} = 20$ *дм*. $EA = EB - AB = 2R - 8$ *дм*. Следовательно, $20^2 = (2R - 8) \cdot 8$, откуда $R = 29$ *дм*. Радиус меньшей окружности $OA = OB - AB = 29 - 8 = 21$ *дм*.

473. Удобно воспользоваться для доказательства чертежем 473. Пусть CD — хорда, перпендикулярная к диаметру EB. Перпендикуляр CA есть среднее геометрическое между отрезками диаметра EA и AB. Среднее арифметическое тех же отрезков, т.-е., $\frac{EA + AB}{2}$, равно $\frac{EB}{2}$, или R. Но всякая хорда меньше диаметра. Следовательно, $CD < EB$ или $\frac{CD}{2} < \frac{EB}{2}$; но $\frac{CD}{2} = CA$; значит, $CA < R$, или среднее геометрическое двух отрезков EA и AB меньше среднего арифметического тех же отрезков.

474. 1) По формуле, $AC^2 = AB \cdot AD$, или $AC^2 = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ *м*; откуда $AC = 1$ *м*.

2) $AB = AD + DB = 4 + 5 = 9$ *см*; но $AC^2 = AB \cdot AD$; подставив вместо AB и AD их значения, получим: $AC^2 = 9 \cdot 4$ *см*, откуда $AC = 6$ *см*.

3) $AD = AB - DB = 20 - 15 = 5$ *см*; так как $AC^2 = AB \cdot AD$, то, подставив вместо AB и AD их значения, получим $AC^2 = 20 \cdot 5$, откуда $AC = 10$ *м*.

475. Чертеж зад. 474.

1) По формуле $AC^2 = AB \cdot AD$, имеем: $AD = \frac{AC^2}{AB}$; подставив вместо AC и AB их значения, получим $AD = \frac{12^2}{18} = 8$ *см*.

2) Подставим в формулу $AC^2 = AB \cdot AD$ значения AC и AD; получим: $12^2 = AB \cdot 4$, откуда $AB = 36$ *м*. Радиус равен $^{36}/_2 = 18$ *м*.

3) Имеем: $AC^2 = AB \cdot AD$. Но $AB = AD + BD = AD + {}^7/_9 AD = {}^{16}/_9 AD$. Следовательно, $AC^2 = {}^{16}/_9 AD \cdot AD$ или $24^2 = {}^{16}/_9 AD^2$; откуда $AD = 18$ *см*; $DB = {}^7/_9 AD = {}^7/_9 \cdot 18 = 14$ *см*.

476. Чертеж зад. 474.

1) По формуле — $AC^2 = AB \cdot AD$, т.-е., $(5AD)^2 = 35 \cdot AD$, откуда $AD = {}^{35}/_{25} = {}^7/_5$ *см* или 14 *мм*.

2) $AD = AB - DB = 2r - AC$. Следовательно, формула $AC^2 = AB \cdot AD$ перепишется так: $AC^2 = 2r \cdot (2r - AC)$. Раскрыв скобки, получим квадратное ур-ие: $AC^2 + 2r \cdot AC - 4r^2 = 0$, откуда $AC = -r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}$. Принимаем положительный корень $AC = r(\sqrt{5} - 1)$.

477. По теореме, произведение отрезков хорд, проведенных через точку, взятую внутри круга, есть величина постоянная.

Обозначим искомый отрезок через x; получаем ур-ие:

$$x \cdot 28 = 24 \cdot 14, \text{ откуда } x = \frac{24.14}{28} = 12 \text{ см}.$$

478. Если бы A, B, C и D лежали на окружности, то AB и CD были бы хордами и, на основании теоремы (см. зад. 477), мы имели бы равенство: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$; но $MA \cdot MB$ (равное $7 \cdot 21$) не равно $MC \cdot MD$ (равное $3 \cdot 16$); следовательно, точки A, B, C и D не лежат на одной окружности.

479. Пусть хорда AB повернута около точки M и приняла положение A_1B_1, при чем $MA_1 = 2^1/_2\ MA$.

Согласно теореме (см. зад. 477), $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$, или $\frac{MB}{MB_1} = \frac{MA_1}{MA} = \frac{2^1/_2\ MA}{MA} = 2^1/_2$, т.-е., MB в $2^1/_2$ раза более новообразованного отрезка MB_1.

480. 1) Пусть $AM = MB = x$; $MC = 3$ *см*, $MD = 48$ *см*. Согласно теореме (зад. 477), $AM \cdot MB = MC \cdot MD$, или $x \cdot x = 3 \cdot 48$, откуда $x = 12$ *см*, $AB = 2x = 24$ *см*.

2) Пусть $AM = 12$ *м*, $BM = 18$ *м*. Обозначим $CM = 3x$, $DM = 8x$. Тогда, по теореме (зад. 477), $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, или $12 \cdot 18 = 3x \cdot 8x$, откуда $x = 3$ *м*. Хорда $CD = CM + DM = 3x + 8x = 11x = 11 \cdot 3 = 33$ *м*.

481. Пусть $AM = 16$ *см*, $BM = 12$ *см*, хорда $CD = 32$ *см*. Обозначим отрезки CM и DM хорды CD через x и $32 - x$. Тогда, на основании теоремы (зад. 477), $CM \cdot DM = AM \cdot BM$, или $x \cdot (32 - x) = 16 \cdot 12$.

Получаем квадратное ур-ие: $x^2 - 32x + 12 \cdot 16 = 0$,

$$\text{откуда } x = 16 \pm \sqrt{16^2 - 12 \cdot 16} = 16 \pm 8.$$

Следовательно, $x_1 = 24$, $x_2 = 8$.

482. По теореме, произведение секущих, проведенных из одной внешней точки, на их внешний отрезок есть величина постоянная.

Пусть $AB = 3AB_1$. Имеем: $AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1$, или $3AB_1 \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1$; отсюда $\frac{AC_1}{AC} = 3$; т.-е., в новом положении AC_1, секущая увеличилась в 3 раза.

483. 1) По теореме (зад. 482), имеем: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Но $AB = AD + DB = 5 + 15 = 20$ *см*. Следовательно, $20 \cdot 5 = 25 \cdot AE$; отсюда $AE = \frac{20 \cdot 5}{25} = 4$ *см*.

2) По теореме (зад. 482), $AB \cdot AD = AC \cdot AE$. Но $AE = AC - EC = 16 - 10 = 6$ *м*. Следовательно, $24 \cdot AD = 16 \cdot 6$, откуда $AD = \frac{16 \cdot 6}{24} = 4$ *м*; $BD = AB - AD = 24 - 4 = 20$ *м*.

3) Дано $AC + AB = 50$ *м*. Из равенства $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ имеем: $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$, или $\frac{3}{7} = \frac{AC}{AB}$. Обозначим $AC = 3x$, $AB = 7x$. По условию, $AC + AB = 50$ *м*, или $3x + 7x = 50$ *м*, откуда $x = 5$ *м*; $AC = 3x = 15$ *м*, $AB = 7x = 35$ *м*.

484. Продолжим прямую AO до пересечения с окружностью. Пусть $AO = 9$ *см*, тогда $AC = AO + OC = 9 + 7 = 16$ *см*, $AB = AO - OC = 9 - 7 = 2$ *см*. Обозначим $AE = ED = x$.

По теореме (зад. 482), имеем: $AC \cdot AB = AD \cdot AE$, или $16 \cdot 2 = 2x \cdot x$, откуда $x = 4$ *см*. Искомая $AD = 2x = 8$ *см*.

485. 1) Дано, что $MA = CD$, $MB = 10$ *дм*, $MD = 15$ *дм*. По теореме (зад. 482), $MB \cdot MA = MD \cdot MC$; но $MC = MD - CD = MD - MA = 15 - MA$. Следовательно, $10 \cdot MA = 15 \cdot (15 - MA)$, откуда $MA = 9$ *дм*; значит, и $CD = MA = 9$ *дм*.

2) Секущая $MB = MA + AB = 18 + 12 = 30$ *см*.

Пусть MC и CD будут выражены через $5x$ и $7x$, а следовательно, $MD = MC + CD = 5x + 7x = 12x$.

По теореме (зад. 482), $MB \cdot MA = MD \cdot MC$, или $30 \cdot 18 = 12x \cdot 5x$, откуда $x = \sqrt{\frac{30 \cdot 18}{12 \cdot 5}} = 3$ *см*.

Искомая $MD = 12x = 12 \cdot 3 = 36$ *см*.

3) Пусть искомая $AB = x$, тогда и $MC = x$; тогда $MB = MA + AB = 20 + x$, $MD = MC + CD = x + 11$.

По теореме (зад. 482), $MD \cdot MC = MB \cdot MA$, или $(x + 11) \cdot x = (20 + x) \cdot 20$; получаем квадратное ур-ие: $x^2 - 9x - 400 = 0$, откуда $x = 25$ *см*.

486. Пусть продолжения хорд будут равны: mx и nx; тогда секущие выразятся величинами $(a + mx)$ и $(b + nx)$.

По теореме (зад. 482), $(a + mx)\, mx = (b + nx)\, nx$, или $(a + mx)\, m = (b + nx)\, n$ [сократить на x мы имеем право, так как x в данном случае действительное число, отличное от нуля]. Разрешив ур-ие $(a + mx)\, n = (b + nx)\, n$, получим:

$$x = \frac{am - bm}{n^2 - m^2};\quad mx = \frac{m(am - bn)}{n^2 - m^2},\quad nx = \frac{n(am - bn)}{n^2 - m^2}.$$

487. По известной теореме, касательная есть средняя пропорциональная между всей секущей и внешней ее частью. Пусть длина касательной — x. Тогда:

1) Секущая равна $4 + 5 = 9$. Из ур-ия $x^2 = 9 \cdot 4$ имеем $x = 6$.

2) Секущая равна $2{,}25 + 1{,}75 = 4$. Из ур-ия $x^2 = 4 \cdot 2{,}25$ имеем: $x = 3$.

3) Секущая равна $1 + 2 = 3$. Из ур-ия $x^2 = 3 \cdot 1$ получаем $x = \sqrt{3}$.

488. Наибольшей секущей, проведенной из данной точки, есть та, которая проходит через центр; тогда внутренний ее отрезок, очевидно, есть диаметр. Обозначим диаметр через $2r$, тогда внешний отрезок секущей равен $50 - 2r$. По теореме (зад. 487), можем составить ур-ие: $50(50 - 2r) = 20^2$. Решив ур-ие, получим: $r = 21$ *см*.

489. Обозначим внешний отрезок секущей через x, тогда секущая выразится $^9/_4 x$. По теореме (зад. 487), можем написать (обозначив длину касательной через y): $y^2 = {}^9/_4 x \cdot x$, откуда $y = {}^3/_2 x$. Отношение секущей к касательной равно:

$$\frac{9}{4}x : \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}.$$

490. Пусть ABC секущая двух пересекающихся окружностей O и O_1, AD — касательная к окружности O, AE — касательная

к окружности O_1. По теореме (зад. 487), имеем: $AD^2 = AC \cdot AB$; $AE^2 = AC \cdot AB$; следовательно, $AD^2 = AE^2$, или $AD = AE$.

Подобным образом доказывается, что и $AD_1 = AE_1$.

491. Секущая $AC = AB + BC = 6 + 8 = 14$ *м*. Если бы AD была касательной, то, по теореме (зад. 487), было бы $AD^2 = AC \cdot AB$. Но $AD^2 = 10^2$, а $AC \cdot AB = 14.6$. Значит, $AD^2 \neq AC \cdot AB$, и AD — не касательная.

Если из одной точки проведены две секущих, то произведения каждой секущей на свой внешний отрезок равны между собой. Если обозначим через AD секущую (или внешний отрезок), а через x внешний отрезок (или секущую), то можем написать равенство: $AC \cdot AB = AD \cdot x$, откуда

$$x = \frac{AC \cdot AB}{AD} = \frac{14.6}{10} = 8{,}4 \text{ м}.$$

Так как $x = 8{,}4$ *м* меньше $AD = 10$ *м*, то, очевидно, AD будет секущей, а точка D — второй точкой пересечения.

492. По теореме (зад. 487), можем написать: $AB^2 = AD \cdot AC$.

1) Имеем: $2^2 = 4 \cdot AC$, откуда $AC = 1$ *см*. Искомая $CD = AD - AC = 4 - 1 = 3$ *см*.

2) Обозначим AC через $4x$, а DC через $5x$; тогда $AD = AC + CD = 4x + 5x = 9x$. Итак, по формуле, $12^2 = 9x \cdot 4x = 36x^2$, откуда $x = 2$ *см*, $AD = 9x = 18$ *см*.

3) Обозначим искомую AB через x, тогда и $CD = x$, а $AD = AC + CD = a + x$. По формуле, $x^2 = (a + x)\,a$, или $x^2 - ax - a = 0$. Решив это квадратное ур-ие, получим: $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Берем только положительный корень ур-ия.

493. 1) Пусть OE расстояние секущей от центра круга. По теореме (зад. 487), $AB^2 = AD \cdot AC$, или $20^2 = 40 \cdot AC$, откуда $AC = 10$ *см*; следовательно, $CD = AD - AC = 40 - 10 = 30$ *см*. По теореме, радиус, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам; следовательно, $DE = \frac{CD}{2} = \frac{30}{2} = 15$ *см*.

Искомый радиус OD определится, как гипотенуза, из прямоугольного тр-ка OED: $OD = \sqrt{OE^2 + ED^2}$, или $OD = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ *см*. По формуле (зад. 487) $AB^2 = AD \cdot AC$, имеем: $4^2 = 8 \cdot AC$, откуда $AC = 2$ *см*. Хорда CD делится пополам в точке E (радиус, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам), т.-е., $CE = \frac{CD}{2}$. Но $CD = AD - AC = 8 - 2 = 6$ *см*; следовательно, $CE = {}^6/_2 = 3$ *см*; $AE = AC + CE = 2 + 3 = 5$ *см* (или $AD - ED = 8 - 3 = 5$ *см*).

Искомая AO определится, как гипотенуза, из прямоугольного тр-ка AOE: $AO = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ *см*.

494. 1) Пусть касательная $= x$. Тогда внешний отрезок секущей выразится через $x - 5$, а внутренний отрезок будет $x + 5$; длина же всей секущей будет $(x - 5) + (x + 5) = 2x$. По формуле (зад. 487), имеем: $x^2 = 2x(x - 5)$. Сократив обе части ур-ия на x (т. к. x действительная величина, отличная от нуля), получим $x = 10$ *см*.

2) Пусть касательная будет x, тогда внешний отрезок секущей выразится $\frac{a-x}{2}$. В самом деле, пусть $AD = y$, тогда $CD = y + x$, а $AC = AD + CD$, или $a = y + y + x$, откуда $y = \frac{a-x}{2}$.

По формуле (зад. 487), $x^2 = a \cdot \frac{a-x}{2}$, или $2x^2 + ax - a^2 = 0$.

Решив это квадратное ур-ие, получим: $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{4}$.

Берем положительный корень $x = \frac{a}{2}$.

495. Обозначим касательную через x. Внутренний отрезок секущей выразится через $x - 2$, внешний — через $x - 4$, а вся секущая: $(x - 2) + (x - 4) = (2x - 6)$ *см*. По формуле (зад. 487), $x^2 = (2x - 6)(x - 4)$, откуда $x^2 - 14x + 24 = 0$. Решив это кв. ур-ие, получим: $x = 7 \pm \sqrt{7^2 - 24}$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 2$.

К условию задачи подходит лишь $x = 12$. Секущая $2x - 6 = 2 \cdot 12 - 6 = 18$ *см*.

496. Если обозначим длину касательной через x, то внутренний отрезок секущей равен $(x + 20)$ *см*, а внешний отрезок $(x - 8)$ *см*. Вся же секущая выразится: $(x + 20) + (x - 8)$ или $(2x + 12)$ *см*. По формуле (зад. 487), $x^2 = (2x + 12)(x - 8)$, откуда $x^2 - 4x - 96 = 0$. Решив это ур-ие, найдем: $x = 2 \pm \sqrt{4 + 96}$. $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.

Второй корень $x = -8$ отбрасываем, как неподходящий к условиям задачи. Таким образом, касательная $= 12$ *см*.

Секущая $2x + 12 = 2 \cdot 12 + 12 = 36$ *см*.

497. 1) Обозначим длину касательной через x, тогда длина секущей выразится через $(30 - x)$ *см*, внутренний отрезок секущей—через $(x - 2)$ *см*; следовательно, внешний отрезок секущей равен $(30 - x) - (x - 2)$ или $(32 - 2x)$ *см*.

По формуле (зад. 487), получим: $x^2 = (30 - x)(32 - 2x)$, откуда $x^2 - 92x + 960 = 0$. Решив это кв. ур-ие, получим:

$$x = 46 \pm \sqrt{46^2 - 960} = 46 \pm 34;\ x_1 = 80,\ x_2 = 12.$$

Принимаем $x = 12$, второй корень 80 противоречит условиям задачи.

Секущая $30 - x$ равна $30 - 12 = 18$ *см*.

2) Пусть x — длина касательной, тогда секущая будет $(15 - x)$ *см*, а внешний отрезок секущей равен $(x - 2)$ *см*.

По теореме (зад. 487), $x^2 = (15 - x)(x - 2)$, откуда $2x^2 - 17x + 30 = 0$.

Решив кв. ур-ие, получим: $x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 30}}{2 \cdot 2}$; $x_1 = 6$, $x_2 = 2{,}5$. Оба корня удовлетворяют условиям задачи.

Секущая $(15 - x)$ *см* равна 9 или 12,5 *см*.

498. Разделить прямую линию в крайнем и среднем отношении значит разделить ее на две части так, чтобы бóльшая часть была средней пропорциональной между всей прямой и меньшей ее частью. Пусть величина прямой a, большая часть x, меньшая $a - x$. Тогда $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$, откуда $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Решив кв. ур-ие, находим: $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$; меньшая часть $a - x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$.

499. Если всю величину выразить через a, то бóльшая часть (см. зад. 498) выразится через $a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = a \cdot 0{,}618\ldots$, а эта величина разнится от $^5/_8 a$, или от $0{,}625\,a$, меньше, чем на $0{,}007\,a$.

500. Пусть вся величина x; тогда, по зад. 498, меньшая часть будет $\frac{x}{2}(3 - \sqrt{5})$. Следовательно, $\frac{x}{2}(3 - \sqrt{5}) = b$, откуда $x = \frac{2b}{3 - \sqrt{5}}$. Бóльшая часть равна $\frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)$, или

$$\frac{2b}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{b(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{b(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

501. Пусть данная прямая — a. Согласно зад. 498, больший отрезок равен $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, меньший $=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$. Следовательно, отложив меньший отрезок на большем, получим разность:

$$\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)-\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})=a(\sqrt{5}-2).$$

Сравнив величины $\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$ и $a(\sqrt{5}-2)$ и приняв во внимание, что $\sqrt{5}=2{,}2\ldots$, видим, что первое выражение больше второго.

Возведя в квадрат $\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$, получим $\frac{a^2}{2}(7-3\sqrt{5})$; тот же результат получим и от произведения $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ и $a(\sqrt{5}-2)$.

502. В формулу зад. 498 подставляем $2r$ вместо a, получаем отрезки диаметра: $r(3-\sqrt{5})$ и $r(\sqrt{5}-1)$. Искомый перпендикуляр есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра, т.-е.,

$$x^2=r(3-\sqrt{5})\,.\,r(\sqrt{5}-1);\ x^2=r^2(4\sqrt{5}-8)=4r^2(\sqrt{5}-2).$$

Отсюда $x=2r\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

503. 1-й способ. Проекция центра O на прямую MN есть точка A, проекция точки M на ту же прямую есть точка B. Нужно найти длину отрезка AB. Из точки M опускаем перпендикуляр на диаметр, тогда $CM=AB$. По теореме (зад. 469), можем написать: $CM^2=DC\,.\,CA$; но $CA=MB=3$ м; $DC=AD-CA=15$ м -3 м $=12$ м. Подставив эти значения в формулу, получим $CM^2=12\,.\,3=36$; $CM=6$.

2-й способ. Пусть проекция центра O на прямую MN есть точка A, проекция точки M на ту же прямую есть точка B. Требуется найти длину отрезка AB. Точку M соединяем с центром и проводим MC параллельно MN. Диаметр круга AD равен расстоянию между параллельными MN и KL, т.-е., 15 м, а радиус $=\frac{15}{2}=7{,}5$ м. Искомый отрезок AB равен CM (как параллельная между параллельными); $CA=MB=3$ м; $OC=OA-AC=7{,}5-3=4{,}5$ м. Из прямоуг. тр-ка OMC находим:

$$CM=\sqrt{OM^2-CM^2}=\sqrt{7{,}5^2-4{,}5^2}=6\text{ м}.$$

Итак, искомый отрезок $AB=CM=6$ м.

504. Высота равнобедренного тр-ка проходит через центр круга (т. к. высота равнобедренного тр-ка делит основание пополам, а центр круга лежит на перпендикуляре, восставленном из середины стороны — значит, и основания, — следовательно, высота совпадает с диаметром).

Обозначим высоту тр-ка BE через x; тогда основание $AC = 2r - x$, а $AE = \frac{AC}{2} = r - \frac{x}{2}$; $DE = BD - BE = 2r - x$.

По теореме (зад. 469): $AE^2 = DE \cdot BE$ или $(r - \frac{x}{2})^2 = (2r - x)x$, откуда получим кв. ур-ие: $5x^2 - 12rx + 4r^2 = 0$. Решив ур-ие, получим: $x = \frac{12r \pm \sqrt{(12r)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4r^2}}{2 \cdot 5}$ или $x_1 = 2r$, $x_2 = {}^2/_5 r$. Первый корень ур-ия не удовлетворяет условиям задачи.

505. См. зад. 469 и 504 (черт. зад. 504).

1) По формуле, $AE^2 = BE \cdot ED$; но $AE = \frac{AC}{2} = 8$ *м*, $BE = 4$ *м*, следовательно, $8^2 = 4 \cdot ED$, откуда $ED = 16$ *м*. Диаметр $BD = BE + ED = 4 + 16 = 20$ *м*. Искомый радиус $= \frac{20}{2} = 10$ *м*.

2) По формуле, $AB^2 = BD \cdot BE$, или $12^2 = BD \cdot 9$, откуда $BD = \frac{12^2}{9} = 16$ *м*. Но $BD = 16$ — диаметр, следовательно, радиус $= 8$ *м*.

3) Определяем высоту из прямоугольного тр-ка ABE: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}$; т. к. $AB = 15$ *м*, $AE = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9$ *м*, то $BE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ *м*.

По формуле, $AB^2 = BD \cdot BE$, или $15^2 = BD \cdot 12$, откуда $BD = \frac{15^2}{12} = {}^{75}/_4$ *м*. Искомый радиус равен половине диаметра BD, т.-е.,

$$\frac{75}{4 \cdot 2} = 9{,}375 \text{ м}.$$

506. Центры кругов — вписанного и описанного — лежат на высоте равнобедренного тр-ка, т. к. высота в равнобедренном тр-ке служит одновременно и высотой и медианой: центр круга описанного лежит на высоте, так как высота равнобедренного тр-ка есть одновременно и перпендикуляр, восставленный из середины основания; центр круга вписанного лежит на высоте, ибо высота равнобедренного тр-ка есть в то же время и биссектриса угла.

Из прямоугольного тр-ка ABE определяем высоту BE: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ *см*. Радиус R описанного круга найдется, как в зад. 505, п. 3:

$$R = \frac{30^2}{2 \cdot 18} = 25 \text{ см}.$$

Прямоугольные тр-ки ABE и BFO_1 подобны, т. к. у них острый угол ABE — общий. Из подобия тр-ков следует: $\frac{O_1F}{AE} = \frac{O_1B}{AB}$, или, полагая $O_1F = r$, $AE = \frac{AC}{2} = 24$ *см*, $BO_1 = BE - O_1E = 18$ *см* $- r$, $AB = 30$ *см*, напишем: $\frac{r}{24} = \frac{18 - r}{30}$, откуда: $r = 8$ *см*; $BO_1 = 18 - r = 18 - 8 = 10$ *см*.

Искомое расстояние $OO_1 = BO - BO_1 = R - 10 = 25 - 10 = 15$ *см*.

507. 1-й способ. Пусть $AC = a$. Проведем радиусы OA и OC и искомую хорду AB.

Хорда AB разделится радиусом OC пополам и перпендикулярна к нему. По теореме „квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на проекцию другой стороны“: $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD$ или $a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot OD$, откуда $OD = \frac{2r^2 - a^2}{2r}$. Из прямоугольного тр-ка OAD определим половину искомой стороны AB:

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{2r^2 - a^2}{2r}\right)^2} = \frac{a}{2r}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Искомая $AB = 2 \cdot AD = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

2-й способ. Проведя BC, BK и AK и продолжив CO до пересечения с окружностью, рассматриваем полученный таким образом четыреугольник, применяя Птоломееву теорему: $AK \cdot BC + BK \cdot AC = AB \cdot CK$. Но $AK = BK = \sqrt{CK^2 - AC^2}$ (тр-к ACK прямоугольный, т. к. $\angle CAK$ прямой, как опирающийся на диаметр CK), или $AK = BK = \sqrt{4r^2 - a^2}$, $AC = BC = a$, $CK = 2r$. Следовательно,

$2a\sqrt{4r^2 - a^2} = 2r \cdot x$, откуда $x = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

3-й способ. Из прямоугольного тр-ка AKC имеем (зад. 354_1): $AK \cdot AC = CK \cdot AD$, откуда $AD = \frac{AK \cdot AC}{CK}$; но $AK = \sqrt{4r^2 - a^2}$, $AC = a$, $CK = 2r$; следовательно, $AD = \frac{a\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$.

Искомая $AB = 2AD = \frac{a}{r}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

508. Из центра O проведем радиус OA; он будет перпендикулярен к касательной MN; этот радиус продолжим до пересечения с хордой BC. Очевидно, прямая AD и будет искомой.

Для определения величины AD, опустим из точки O перпендикуляр OK на данную хорду AB. Прямоугольные тр-ки ABD и AOK подобны, так как имеют общий острый угол BAD. Из подобия этих тр-ков имеем: $\frac{AD}{AK} = \frac{AB}{AO}$, но $AK = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6$ *см*. $AO = r = 8$ *см*; следовательно, $\frac{AD}{6} = \frac{12}{8}$, откуда $AD = \frac{6 \cdot 12}{8} = 9$ *см*.

509. Пусть $AB = a$, а искомое расстояние — AC. Опустим перпендикуляр OK на хорду AC. Прямоугольные тр-ки AOK и ABC подобны, так как $\angle AOK = \angle ACB$, ибо $\angle AOK = {}^1/_2 \angle ACC$, т.-е., измеряется половиной дуги AC, но и $\angle ACB$ измеряется половиной той же дуги. Из подобия этих тр-ков имеем: $\frac{AC}{AO} = \frac{AB}{AK}$, но $AK = \frac{AC}{2}$; следовательно, $\frac{AC^2}{2} = ar$, откуда $AC = \sqrt{2ar}$.

510. Пусть $AC = CD$. Опустим из точки C перпендикуляр на диаметр AB. Тогда, по теореме „хорда есть средняя пропорциональная между диаметром и проекцией этой хорды на диаметр", имеем: $AC^2 = AB \cdot AE$. Но $AB = 2r$, $AE = AB - BE = AB - CD = 2r - AC$. Следовательно, $AC^2 = 2r(2r - AC)$, или, полагая $AC = x$, напишем: $x^2 + 2rx - 4r^2 = 0$. Решив это ур-ие, получим: $x = -r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}$. Итак, $AC = r(\sqrt{5} - 1)$.

511. Пусть $KC = x$, $AK = 8x$, $AC = AK + KC = 8x + x = 9x$. Соединим точки B и C; тр-ки ABC и AOK подобны, ибо у них общий острый угол A. Из подобия этих тр-ков имеем:

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AO}{AC} \text{ или } \frac{8x}{2r} = \frac{r}{9x}, \text{ откуда } 36x^2 = r^2;\ x = \frac{r}{6}.$$

Искомая $AC = 9x = 9 \cdot \frac{r}{6} = \frac{3}{2}r$.

512. Соединим точки A с C и B с D. Хорды AC и BD равны между собою, как стягивающие равные дуги, заключенные между параллельными хордами. Опустим перпендикуляры CK и DL на диаметр AB.

Из тр-ка AMC имеем: $MC^2 = AC^2 + MA^2 - 2MA \cdot AK$.

Из тр-ка MBD имеем: $MD^2 = BD^2 + MB^2 - 2MB \cdot BL$.

Сложив почленно эти равенства, получим:

$MC^2 + MD^2 = AC^2 + BD^2 + MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot AK - 2MB \cdot BL$.

Но $AC = BD$, $AK = BL$ (как катеты равных прямоугольных тр-ков ACK и BDL). Четырехчлен $AC^2 + BD^2 - 2MA \cdot AK - 2MB \cdot BL = 0$. В самом деле, обозначим $AC = BD = m$, $AK = BL = n$, тогда четырехчлен перепишется так: $2m^2 - 2n\,(MA + MB) = 2m^2 - 2n \cdot AB$; но $AC^2 = AK \cdot AB$ (хорда есть средняя пропорциональная между диаметром и проекцией хорды на диаметр), или $m^2 = n \cdot AB$, откуда $m^2 - n \cdot AB = 0$; следовательно, $2m^2 - 2n \cdot AB = 0$.

Итак, $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$.

513. 1-й способ. Пусть искомая (наименьшая) хорда в точке пересечения делится на отрезки x и y, так что (согласно свойству хорд, пересекающихся в одной точке) $xy = 18 \cdot 50 = 900$ (1). Положим, что длина искомой хорды равна m, т.-е., $x + y = m$ (2). Решив совместно ур-ия (1) и (2), именно квадратное ур-ие $z^2 - mz + 900 = 0$, получим $z = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 900}}{2}$. Для того, чтобы корень был вещественным, необходимо, чтобы подкоренное количество $m^2 - 4 \cdot 900 \geqslant 0$, откуда $m^2 \geqslant 4 \cdot 900$ или $m \geqslant 2 \cdot 30$. Следовательно, наименьшее значение $m = 60$.

2-й способ. Рассматриваем $xy = 900$, как площадь прямоугольника со сторонами x и y. Но из всех прямоугольников, имеющих одну и ту же площадь, наименьшим периметром обладает квадрат (отд. алгебры maxima и minima). Следовательно, $x = y = \sqrt{900} = 30$, а $x + y = 60$.

Прим. Наглядно можно решить эту задачу, разложив 900 на множителей $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и разбив их на 2 группы так, чтобы сумма произведений была наименьшей.

514. Пусть $DK = KL = LE$. Обозначим BK через x, тогда $KL = BK\sqrt{2} = x\sqrt{2}$, так как тр-к BKL — прямоугольный и равнобедренный. В самом деле: угол B прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; углы A и C равны по $\dfrac{d}{2}$, как вписанные, опирающиеся на четверть окружности ($\smile AB = \smile BC$); следовательно, $\angle BKL = \angle BAC = \dfrac{d}{2}$, $\angle BLK = \angle BCA = \dfrac{d}{2}$.

Напишем равенство (зад. 477): $AK \cdot BK = DK \cdot EK$; но $AK = AB - BK = a - x$, $BK = x$, $DK = x\sqrt{2}$, $EK = KL + EL = 2x\sqrt{2}$. Равенство перепишем так: $(a-x)x = x\sqrt{2} \cdot 2x\sqrt{2}$, или $ax = 5x^2$, откуда $x = \frac{a}{5}$.

515. Проведем хорду AB. Докажем, что AB параллельна CD. В самом деле: продолжим радиусы OA и OB до пересечения с окружностью. Напишем равенства: $BL \cdot NL = DL \cdot CL$ и $AK \cdot MK = CK \cdot DK$; но $CK = KL = DL = x$; следовательно, $DL \cdot CL = DL(CK + KL) = x \cdot 2x = 2x^2$, и $CK \cdot DK = CK(KL + LD) = x \cdot 2x = 2x^2$, т.-е., $DL \cdot CL = CK \cdot DK$, а потому $BL \cdot NL = AK \cdot MK$. Мы видим, что BL и NL — отрезки диаметра BN, а AK и MK — отрезки диаметра AM. Но произведения частей одного и того же диаметра могут быть равны лишь в том случае, когда эти части равны (см. примечание), следовательно, $MK = NL$ и $AK = BL$. Отсюда и $OL = OK$, так как $OL = OB - BL = r - BL$, а $OK = OA - AK = r - AK$. Рассматривая тр-ки AOB и OKL и заметив, что $OA = OB$ и $OK = OL$, заключаем, что $KL \parallel AB$, а потому и $CD \parallel AB$. Обозначим OK через x, тогда $KL = x\sqrt{2}$ (из равнобедренного прямоугольного тр-ка OKL), $KD = KL + LD = 2x\sqrt{2}$, $AK = OA - OK = r - x$, $KM = OM + OK = r + x$.

По теореме (зад. 477), $CK \cdot KD = AK \cdot KM$ или

$$x\sqrt{2} \cdot 2x\sqrt{2} = (r-x)(r+x) \text{ или, } r^2 = 5x^2, \text{ откуда } x = \frac{r}{\sqrt{5}}.$$

Примечание. Пусть мы имеем произведение ab. Уменьшив a на x, а b увеличив на x, получим такое произведение $(a-x)(b+x)$; чтобы ab было равно $(a-x)(b+x)$, т.-е., $ab = (a-x)(b+x)$, необходимо, чтобы $ax - bx - x^2 = 0$, или $x(a-b-x) = 0$ [что получается по упрощении равенства $ab = (a-x)(b+x)$]. Отсюда либо $x = 0$, либо $a - b - x = 0$, т.-е., $x = a - b$. Подставив $x = a - b$ в произведение $(a-x)(b+x)$, получим первоначальное произведение, только в обратном порядке: ba.

516. Тр-ки ABC и FBG подобны, так как $AC \parallel FG$, а потому $\frac{FG}{AC} = \frac{FB}{AB} = \frac{1}{2}$, т.-е. $FG = \frac{AC}{2} = 6$ *м*. По теореме (зад. 477), имеем: $DF \cdot FE = AF \cdot FB$ (1). Обозначим DF через x, тогда и $GE = x$ (в чем убедимся, перегнув чертеж по диаметру BK; тогда E совпадет с D, а G с F); $FE = FG + GE = 6\text{ м} + x$; $AF = FB = \frac{AB}{2} = 4\text{ м}$. Следовательно, равенство (1) перепишется так: $x(6+x) = 4 \cdot 4$, или

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

Решив это квадратное ур-ие, получим:

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 16};\ x_1 = 2,\ x_2 = -8.$$

Принимаем положительное значение $x = 2$, тогда

$$DE = FG + 2x = 6 + 4 = 10\ м.$$

517. Проведем радиус OA и продолжим перпендикуляр OC в обе стороны до пересечения с окружностью. Тогда (зад. 477):

$$AD \cdot DE = DK \cdot DL\ (1).$$

Так как $AC = \frac{AB}{2} = 12\ см$, $OC = 9\ см$, то $OA = r = \sqrt{AC^2 + OC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\ см$; $CD = OC - OD = 9 - 4 = 5\ см$; $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\ см$ (из прямоугольного тр-ка ACD); $DK = OK - OD = r - 4 = 15 - 4 = 11\ см$; $DL = OL + OD = r + 4 = 15 + 4 = 19\ см$.

Итак, равенство (1) перепишется так:

$$13 \cdot DE = 11 \cdot 19,\ \text{откуда}\ DE = \frac{11 \cdot 19}{13}.$$

Искомая хорда $AE = AD + DE = 13 + \frac{11 \cdot 19}{13} = 29{,}08...\ см.$

518. Соединим точку C с центром; радиус OC, очевидно, перпендикулярен к диаметру AB, равному $AD + BD = 35 + 5 = 40\ см$. Отсюда радиус круга равен $^{40}/_{2} = 20\ см$, а $OD = OB - BD = 20 - 5 = 15\ см$. Отрезок CD определится, как гипотенуза прямоугольного тр-ка ODC:

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\ см.$$

По теореме (зад. 477), $DE \cdot CD = AD \cdot BD$ или $DE \cdot 25 = 35 \cdot 5$, откуда $DE = 7\ см$. Искомая хорда $EC = CD + DE = 25 + 7 = 32\ см$.

519. Продолжим сторону искомого квадрата EG до пересечения с окружностью. Рассматривая пересекающиеся хорды AD и EL, напишем (зад. 477): $EG \cdot GL = AG \cdot GD$. Пусть сторона искомого квадрата $EG = x$; $GL = GM + ML = a + x$;

$$AG = \frac{AD}{2} - \frac{GF}{2} = \frac{a - x}{2};\ GD = \frac{AD}{2} + \frac{GF}{2} = \frac{a + x}{2}.$$

Равенство $EG \cdot GL = AG \cdot GD$ перепишется так:

$$x(a + x) = \frac{a - x}{2} \cdot \frac{a + x}{2},\ \text{или}\ 5x^2 + 4ax - a^2 = 0.$$

Решив квадратное ур-ие, получим: $x = \frac{-4a \pm \sqrt{(4a)^2 + 4 \cdot 5a^2}}{2 \cdot 5}$.

Принимаем $x = \frac{a}{5}$.

520. Соединим A с C и B с D. Получаются подобные тр-ки AMC и BMD, так как $\angle AMC = \angle BMD$, как вертикальные; $\angle ACM = \angle DBM$, как опирающиеся на одну и ту же дугу AD; точно так же равны $\angle CAM$ и $\angle BDM$. Из подобия этих тр-ков следует: $\frac{MA}{MD} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$ и $\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BD} = \frac{m}{n}$. Обозначим $MA = mx$, $MD = nx$, $MC = my$, $MB = ny$. Следовательно, $AB = MA + MB = mx + ny = a$ (1), а $CD = MC + MD = my + nx = b$ (2). Решив эти ур-ия, получим $x = \frac{ma - nb}{m^2 - n^2}$, $y = \frac{mb - na}{m^2 - n^2}$. Итак, $MA = mx = \frac{m(ma - nb)}{m^2 - n^2}$, $MB = ny = \frac{n(mb - na)}{m^2 - n^2}$, $MC = my = \frac{m(mb - na)}{m^2 - n^2}$, $MD = nx = \frac{n(ma - nb)}{m^2 - n^2}$.

521. Тр-ки MBC и MAD подобны, так как угол M — общий, $\angle B = \angle D$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Из подобия тр-ков имеем: $\frac{MB}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{m}{n}$.

Пусть $MB = mx$, $MD = nx$; тогда $MA = MB - AB = mx - a$, $MC = MD - CD = nx - b$.

По теореме (зад. 482), напишем: $MB \cdot MA = MD \cdot MC$, или $mx(mx - a) = nx(nx - b)$. Решив последнее ур-ие, найдем: $x = \frac{ma - nb}{m^2 - n^2}$. Следовательно, $MB = mx = \frac{m(ma - nb)}{m^2 - n^2}$, $MD = nx = \frac{n(ma - nb)}{m^2 - n^2}$.

522. Пусть искомое расстояние $AE = x$; тогда $AD = AE + ED = x + 2r$.

По условию, $AD = AB + AC = 2AB$, или $x + 2r = 2AB$, откуда $AB = \frac{x + 2r}{2}$. По формуле (зад. 487), $AB^2 = AD \cdot AE$ или $\left(\frac{x + 2r}{2}\right)^2 = (x + 2r)x$; после упрощения получаем: $3x^2 + 4rx - 4r^2 = 0$. Решив это квадратное ур-ие, получим:

$$x = \frac{-4r \pm \sqrt{(4r)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 4r^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-4r \pm 8r}{6}.$$ Принимаем $x = \frac{2}{3}r$.

523. Соединим центр O с точкой касания K хорды AB (она же касательная к внутренней окружности). Радиус OK, перпендикулярный к *касательной* AB, делит *хорду* AB пополам; следовательно, $AK = BK = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Рассматривая внутреннюю окружность, у которой AK — касательная, а AD — секущая (при чем $AC = CD$, по условию), можем написать равенство (зад. 487): $AK^2 = AD \cdot CD$ (1). Обозначим CD через x, тогда $AD = 2x$. Тогда равенство (1) перепишется так:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2x \cdot x, \text{ откуда } x = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{4}\sqrt{2}.$$

Опустив перпендикуляр OL на хорду AE, видим, что хорда AE делится пополам, т.-е., $AL = EL$; точно так же и хорда CD делится пополам, т.-е., $CL = DL$; следовательно (вычтя почленно из первого равенства второе), и $AC = DE$. Итак, хорда AE делится на 3 равные части: $AC = CD = DE = x$, и $AE = 3x = \frac{3}{4} a\sqrt{2}$.

524. Тр-ки ACD и BCD подобны, так как у них $\angle C$ — общий, а $\angle CAD = \angle BDC$, как имеющие одну меру — $^1/_2 \smile BD$ ($\angle CAD$ — описанный и опирается на дугу BD, $\angle BDC$ составлен касательною CD и хордой BD и измеряется половиной дуги BD). На основании подобия этих тр-ков можем написать:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{BC}.$$

По формуле (зад. 487), $CD^2 = AC \cdot BC$ или $CD^2 = (AB + BC)\,BC$, или $CD^2 = {}^9/_5\,AB \cdot {}^4/_5\,AB$, откуда $CD = {}^6/_5\,AB$.

Пропорция перепишется так: $\frac{AD}{BD} = \frac{{}^6/_5 AB}{{}^4/_5 AB} = \frac{3}{2}$.

525. Внешний отрезок AD определится из формулы (зад. 487): $AC^2 = AB \cdot AD$, или $24^2 = 32 \cdot AD$, откуда $AD = 18$ *см*. Проведем хорды BC и DC. Полученные тр-ки ABC и ACD подобны (см. зад. 524), и мы можем написать пропорцию: $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$.

Согласно отношению $\frac{BC}{DC} = \frac{4}{3}$ можем положить: $BC = 4x$, $DC = 3x$. Тр-к BCD прямоугольный, т. к. $\angle BCD$ прямой, ибо опирается на диаметр BD. Из этого прямоугольного тр-ка имеем: $BD^2 = BC^2 + CD^2$; но $BD = AB - AD = 32 - 18 = 14$ *см*. Следовательно, $14^2 = (4x)^2 + (3x)^2$, откуда $x = \frac{14}{5}$ *см*; $BC = 4x = \frac{4 \cdot 14}{5} = 11{,}2$ *см*

526. Как и в зад. 524, напишем пропорцию:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AC}{BC}; \text{ но } \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n}, \text{ значит, и } \frac{AD}{CD} = \frac{m}{n}.$$

Положим, $AD = mx$ и $CD = nx$. Согласно формуле (зад. 487), $CD^2 = AD \cdot BD$ (1); заметив, что $BD = AD - AB = mx - a$, перепишем равенство (1) так: $(nx)^2 = mx(mx - a)$; откуда, сократив обе части на x и решив ур-ие, получим: $x = \frac{am}{m^2 - n^2}$.

Искомая длина $CD = nx = \frac{amn}{m^2 - n^2}$.

Правильные многоугольники.

Обозначения: r — радиус окружности; a_n — сторона правильного вписанного n-угольника; b_n — сторона правильного описанного n-угольника; k_n — апофема правильного вписанного n-угольника.

527. 1-й способ. Число углов n-угольника равно $2dn - 4d$, или $2d(n-2)$, в градусном измерении $180°(n-2)$, а каждый угол равен $\frac{180°(n-2)}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$.

Подставив вместо n последовательно 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 25, получим: 60°; 90°; 108°; 120°; 135°; 144°; 150°; 165° 36′.

2-й способ. Соединив центр O с вершинами углов $A, B, C...$, получим тр-ки OAB, OBC, $OCD...$, равные между собою. В любом из этих тр-ков, напр., тр-ке OAB, углы OAB и OBA равны и каждый из них равен половине угла n-угольника; следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = \angle A$.

Но угол $AOB = \frac{360°}{n}$, а сумма углов тр-ка равна $2d$; следовательно, $\angle OAB + \angle OBA = 2d - \frac{360°}{n}$; значит, и $\angle A = 2d - \frac{360°}{n}$.

528. Проведем радиус OA. Из прямоугольного тр-ка AOC, где $OA = r$, $OC = \frac{r}{2}$, имеем: $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} =$

$$= \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Но $AC = \frac{AB}{2}$ (радиус, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам). Следовательно, $\frac{AB}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, откуда $AB = r\sqrt{3}$, а последнее выражение есть сторона правильного вписанного треугольника.

2) Пусть $AB = a_6$, равное радиусу описанного круга.

Из прямоугольного тр-ка AOC имеем: $OC = \sqrt{AO^2 - AC^2}$, или (принимая во внимание, что $AC = \frac{AB}{2} = \frac{r}{2}$):

$$OC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Но $r\sqrt{3}$ есть выражение для a_3 — стороны правильного вписанного тр-ка; следовательно, $OC = \frac{a_3}{2}$.

Наглядно можно доказать, что $k_6 = \frac{a_3}{2}$, если сравнить прямоугольные тр-ки AOC и KOL, гда AL есть сторона правильного вписанного тр-ка. Эти тр-ки равны, т. к. $OA = OL = r$, а $AC = OK = \frac{r}{2}$ (ср. п. 1); следовательно, $OC = KL$, т.-е. $k_6 = \frac{a_3}{2}$.

529. Пусть радиус описанного круга R, а радиус вписанного — r. По условию $R - r = m$. Но из теории известно, что радиус описанного около тр-ка круга вдвое больше радиуса вписанного круга, т.-е. $R = 2r$. Подставив $2r$ вместо R в выражение $R - r = m$, получим $r = m$, откуда $R = 2m$. Но $a_3 = R\sqrt{3}$; следовательно, $a_3 = 2m\sqrt{3}$.

530. 1) Подставив в формулу удвоения: $a_8 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_4^2}{4}}}$ значение $a_4 = r\sqrt{2}$, получим:

$$a_8 = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{2r^2}{4}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

2) А. По формуле удвоения имеем: $a_{12} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_6^2}{4}}}$; но $a_6 = r$, следовательно,

$$a_{12} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

В. От середины C полуокружности ACB отложим дугу CD, равную 30°, и, проведя хорду CD, соединим концы ее C и D с концами A и B диаметра. Получается вписанный 4-угольник $ABDC$, в котором $CD = a_{12}$ $\left(\text{т. к. стягивает дугу в } 30° = \frac{360°}{12}\right)$, $AC = BC = a_4$ (стягивают по $^1/_4$ окружности), $AD = a_3$ (стягивает дугу в 120°), $BD = a_6$ (стягивает дугу в 60°). По теореме Птоломея, $DC \cdot AB + AC \cdot BD = AD \cdot BC$ или $a_{12} \cdot 2r + a_4 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_4$.

Подставив вместо a_3, a_4, a_6 соответственно $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$, r, получим: $a_{12}.2r + r\sqrt{2}.r = r\sqrt{3}.r\sqrt{2}$.

Из этого ур-ия определяем $a_{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Примечание. Этот же результат получим путем преобразования полученного выше выражения $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, по формуле

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ где } c = \sqrt{a^2 - b}.$$

531. Пусть AB сторона правильного вписанного n-угольника, OC—его апофема. Из прямоугольного треугольника OAC имеем: $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}$; т. к. $OC = k$, $OA = r$, $AC = \frac{a_n}{2}$, то формула перепишется так: $k_n = \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}$ (1).

Воспользуемся значениями (зад. 530) $a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ и $a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, а также $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, и подставим их в формулу (1).

Итак, $k_8 = \sqrt{r^2 - \frac{a_8^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{2})}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

$$k_{12} = \sqrt{r^2 - \frac{a_{12}^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{3})}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \text{ или}$$

$$k_{12} = \frac{r}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2});$$

$$k_{10} = \sqrt{r^2 - \frac{a_{10}^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4.4}} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

532. Из формул: $a_3 = r\sqrt{3}$, $a_4 = r\sqrt{2}$, $a_6 = r$, $a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (зад. 530), $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, $a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ (зад. 530), получим: 1) $r = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$; 2) $r = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$;

3) $r = a_6$; 4) $r = \dfrac{a_8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{a_8\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{a_8\sqrt{2-\sqrt{2}}\,(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} =$

$= \dfrac{a_8\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2}}{4-2} = \dfrac{a^8}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 5) $r = \dfrac{2a_{10}}{\sqrt{5}-1} =$

$= \dfrac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{2a_{10}(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \dfrac{a_{10}}{2}(\sqrt{5}+1)$;

6) $r = \dfrac{a_{12}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \dfrac{a_{12}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{a_{12}\sqrt{2-\sqrt{3}}\,(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{a_{12}\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2}}{4-3} = a_{12}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

или $\dfrac{a_{12}}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (см. примеч. к зад. 530).

533. Пусть AB сторона правильного вписанного многоугольника, равная a, радиус OA равен r. Из прямоугольного тр-ка AOC определяем апофему OC (или, согласно условному обозначению, k):

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2};\ \text{но}\ AC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

следовательно, $k = \sqrt{r^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

В каждом из перечисленных 6 случаев выражаем r через a из формул (см. зад. 532):

1) $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $k_3 = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$;

2) $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $k_4 = \sqrt{\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$;

3) $r = a$; $k_6 = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$;

4) $r = \dfrac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; $k_8 = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}(2+\sqrt{2}) - \dfrac{a^2}{4}} =$

$= \dfrac{a}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$ (применяя примеч. к зад. 530);

5) $r=\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$; $k_{10}=\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2-\frac{a^2}{4}}=$

$=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$;

6) $r=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$ [или $\frac{a}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$];

$k_{12}=\sqrt{a^2(2+\sqrt{3})-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$,

или $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$ (см. примеч. к зад. 530).

534. 1-й способ. 1) Апофема k_3 есть радиус вписанного круга. Но радиус вписанного круга вдвое менее радиуса описанного; следовательно, $k_3=\frac{r}{2}$, откуда $r=2k$.

2) Апофема k_4, отрезок OE, равна половине стороны квадрата AB, т.-е. $k_4=\frac{a_4}{2}=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$; следовательно, $r=\frac{2k}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2}$.

3) Апофема k_6, отрезок OG, определится, как высота правильного тр-ка OBC со стороной r ($OB=OC=r$, а $BC=a_6=r$), т.-е., $k_6=OG=\frac{r}{2}\sqrt{3}$, откуда $r=\frac{2k\sqrt{3}}{3}$.

4) Апофема k_8 определится из зад. 531:

$k_8=\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, откуда $r=\frac{2k}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2k\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}=$

$=\frac{2k\sqrt{2+\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=k\sqrt{2+\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})=$

$=k\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^2}=k\sqrt{2(2-\sqrt{2})}$.

5) Апофема k_{10} определится из зад. 531:

$k_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, откуда $r=\frac{4k}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{4k\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}=$

$=\frac{2k\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}}=\frac{2k\sqrt{10+2\sqrt{5}}(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$

$=\frac{2k\sqrt{2(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2}}{20}=\frac{k\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5}=$

$=k\sqrt{\frac{10(5-\sqrt{5})}{25}}=k\sqrt{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}=$

$=k\sqrt{2-0{,}4\sqrt{5}}=k\sqrt{2-\sqrt{0{,}8}}$.

6) Апофема k_{12} определится из зад. 531:

$$k_{12}=\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},\ \text{откуда}\ r=\frac{2k}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2k\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2k\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})}=\frac{2k\sqrt{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})^2}}{1}=$$

$$=2k\sqrt{1\cdot(2-\sqrt{3})}=2k\sqrt{2-\sqrt{3}}$$ или $r=k(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ [см. примечание к зад. 530].

2-й способ. Из черт. 533 видно, что $AO=\sqrt{AC^2+OC^2}$ или $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+k^2}$. Пользуемся для k формулами из зад. 533, откуда определим в каждом случае a.

1) $a_3=\frac{6k}{\sqrt{3}}=2k\sqrt{3}$; $r=\sqrt{3k^2+k^2}=2k$;

2) $a_4=2k$; $r=\sqrt{k^2+k^2}=k\sqrt{2}$;

3) $a_6=\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; $r=\sqrt{\frac{k^2}{3}+k^2}=\frac{2k\sqrt{3}}{3}$;

4) $a_8=\frac{2k}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{2k\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}=2k\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

$r=\sqrt{k^2(3-2\sqrt{2})+k^2}=k\sqrt{4-2\sqrt{2}}$;

5) $a_{10}=\frac{2k}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}=\frac{2k\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}}=\frac{2k\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{5}$;

$r=\sqrt{\frac{k^2(5-2\sqrt{5})}{5}+k^2}=k\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}=k\sqrt{2-0{,}4\sqrt{5}}=$

$=k\sqrt{2-\sqrt{0{,}8}}$.

6) $a_{12}=\frac{2k}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\frac{2k\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{7+4\sqrt{3}}=2k\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$\left[\text{или}\ a_{12}=\frac{2k}{2+\sqrt{3}}=2k(2-\sqrt{3})\right]$; $r=\sqrt{k^2(7-4\sqrt{3})+k^2}=$

$=2k\sqrt{2-\sqrt{3}}\left[\text{или}\ r=k(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$.

535. Как известно из теории, сторона правильного описанного многоугольника относится к стороне одноименного вписанного, как радиус к апофеме. По принятым здесь обозначениям можем написать $\frac{b_n}{a_n}=\frac{r}{k_n}$, откуда $b_n=\frac{a_n \cdot r}{k_n}$. Следовательно, для решения приведенных случаев надо определить a и k.

a_3, a_4, a_6, a_{10} — равны, согласно теории, соответственно: $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$, r, $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$; a_8 и a_{12} соответственно равны $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ и $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $\left[\text{ или } \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]$ (зад. 530); k_3, k_4, k_6, k_8, k_{10}, k_{12} определим из зад. 531 и 534.

1) $b_3=\frac{a_3 r}{k_3}$; но $a_3=r\sqrt{3}$, а k_3 получим из равенства (зад. 534): $r=2k_3$, откуда $k_3=\frac{r}{2}$. Следовательно, $b_3=\frac{r\sqrt{3}\cdot r}{\frac{r}{2}}=2r\sqrt{3}$.

2) $b_4=\frac{a_4 r}{k_4}$; но $a_4=r\sqrt{2}$, а k_4 получим из равенства (зад. 534): $r=k_4\sqrt{2}$, откуда $k_4=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $b_4=r\sqrt{2}\cdot r:\frac{r\sqrt{2}}{2}=2r$.

Примечание. Этот результат можно получить и наглядно, начертив описанный около круга квадрат.

3) $b_6=\frac{a_6 r}{k_6}$; но $a_6=r$, а k_6 получим из равенства (зад. 534): $r=\frac{2k_6\sqrt{3}}{3}$, откуда $k_6=\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $b_6=r\cdot r:\frac{r\sqrt{3}}{2}=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

4) $b_8=\frac{a_8 r}{k_8}$; но $a_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (зад. 530), $k_8=\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (зад. 531). Следовательно, $b_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot r:\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=$

$$=\frac{2r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2r\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{2r\sqrt{2(2-\sqrt{2})^2}}{2}=$$

$$=r(2-\sqrt{2})\sqrt{2}=2r\sqrt{2}-2r=2r(\sqrt{2}-1).$$

5) $b_{10}=\frac{a_{10}r}{k_{10}}$; но $a_{10}=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$, а $k_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

(зад. 531). Следовательно, $b_{10}=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}r:\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$

$$=\frac{2r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{2r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}=2r\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}=$$

$$=2r\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}=2r\sqrt{\frac{2(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}}=$$

$$=2r\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5-3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot(5-1)}}=2r\sqrt{\frac{4\sqrt{5}-8}{4\sqrt{5}}}=$$

$$=2r\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}=2r\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}=2r\sqrt{1-\sqrt{\frac{4}{5}}}=$$

$$=2r\sqrt{1-\sqrt{0{,}8}}.$$

6) $b_{12}=\frac{a_{12}\,r}{k_{12}}$; но $a_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (зад. 530),

а $k_{12}=\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (зад. 531).

Следовательно, $b_{12}=\frac{a_{12}\cdot r}{k_{12}}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot r:\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=$

$$=2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}=$$

$$=2r\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}=2r(2-\sqrt{3}).$$

Другие решения:

b_8 можно получить и таким способом.

Возьмем равнобедренный прямоугольный тр-к ABC, в котором $AB=BC=r$, и проведем биссектрису AD; тогда $BD=\frac{1}{2}b_8$.

В самом деле. Достроим равнобедренный тр-к ADE; угол $DAE=45°$ ($\angle DAB=\frac{45°}{2}$, а $\angle BAE=\angle DAB$), т. е., $\frac{360°}{8}$; описав окружность радиусом $AB=r$, видим, что DE — сторона правильного описанного 8-угольника.

Задача, следовательно, сводится к нахождению величины BD, которая определится на основании теоремы о биссектрисе: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Пусть $BD=x$; тогда $DC=r-x$, $AC=r\sqrt{2}$ (гипотенуза равнобедренного прямоугольного тр-ка, с катетами r). Пропорция перепишется так: $\frac{x}{r-x}=\frac{r}{r\sqrt{2}}$. Решив это ур-ие, получим $x=r(\sqrt{2}-1)$. Итак, $b_8=2x=2r(\sqrt{2}-1)$.

Таким же способом определяем и b_{12}, взявши прямоугольный тр-к с углом в 30°.

Если в тр-ке ABC катет $BC=r$, а $\angle ACB=30°$, CD — биссектриса угла ACB, то $BD={}^1/_2 b_{12}$, а $ED=b_{12}$.

Для доказательства, достраиваем равнобедренный тр-к ECD. Рассуждаем дальше, как и при определении b_8. (Зависимость между катетами и гипотенузой см. зад. 67, — 1 выпуск, — откуда и определяем AB и AC, а затем, на основании теоремы о биссектрисе, находим и BD, равное ${}^1/_2 b_8$).

Прим. Для решения этой задачи можно воспользоваться формулой $b_n=\frac{a_n r}{\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}$, при чем для a_3, a_4, a_6. a_{10} имеем готовые формулы из теории, а для a_8 и a_{12} формулы выведены в зад. 530.

Напр., $b_4=\frac{a_4 r}{\sqrt{r_2-\frac{a_4^2}{4}}}=\frac{r\sqrt{2}\,.\,r}{\sqrt{r^2-\frac{2r^2}{4}}}=\frac{r^2\sqrt{2}}{{}^1/_2 r\sqrt{2}}=2r.$

536. Из теории мы знаем, что $\frac{b_n}{a_n}=\frac{r}{k_n}$, откуда $b_n=a_n\cdot\frac{r}{k_n}$.

Отношение $\frac{r}{k_n}$ мы можем получить из зад. 534.

1) Так как $r=2k_3$, то $\frac{r}{k_3}=2$; следовательно, $b_3=a_3\cdot\frac{r}{k_3}=2a$.

2) Так как $r=k_4\sqrt{2}$, то $\frac{r}{k_4}=\sqrt{2}$;

следовательно, $b_4=a_4\cdot\frac{r}{k_4}=a\sqrt{2}$.

3) Так как $r=\frac{2k_6\sqrt{3}}{3}$, то $\frac{r}{k_6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

следовательно, $b_6=a_6\cdot\frac{r}{k_6}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

4) Так как $r = k_8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$, то $\frac{r}{k_8} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$;

следовательно, $b_8 = a_8 \cdot \frac{r}{k_8} = a\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

5) Так как $r = k_{10}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, то $\frac{r}{k_{10}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$;

следовательно, $b_{10} = a_{10} \cdot \frac{r}{k_{10}} = a\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, или $b_{10} = a\sqrt{2-\sqrt{0{,}8}}$.

6) Так как $r = 2k_{12}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, то $\frac{r}{k_{12}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

следовательно, $b_{12} = a_{12} \cdot \frac{r}{k_{12}} = 2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$, или $b_{12} = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

537. Из теории мы знаем, что $a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

1) В зад. 530 дается формула для a_8. Следовательно,

$$a_{16} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_8^2}{4}}} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{2})}{4}}} =$$

$$= \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

2) В зад. 530 дается формула для a_{12}. Следовательно,

$$a_{24} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_{12}^2}{4}}} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{r^2(2-\sqrt{3})}{4}}} =$$

$$= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

3) $a_{20} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_{10}^2}{4}}} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}}}$

(так как из теории мы знаем, что $a_{10} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$) $=$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

538. 1-й способ. По формуле удвоения,

$a_{10} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}}$; но, с другой стороны, $a_{10} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$;

следовательно, $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}}$, откуда и выразим a_5 через r. Для этого обе части ур-ия возводим в квадрат:

$\frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}$; преобразуем равенство в виде

$\frac{r^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} - 2r^2 = -2r\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}$, или $\frac{-r^2(1+\sqrt{5})}{2} =$

$= -2r\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}$, или $r(1+\sqrt{5}) = 4\sqrt{r^2 - \frac{a_5^2}{4}}$; возведем

полученные выражения в квадрат: $r^2(1+\sqrt{5})^2 = 16\left(r^2 - \frac{a_5^2}{4}\right)$,

откуда $a_5^2 = \frac{16r^2 - r^2(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{r^2(10-2\sqrt{5})}{4}$, или

$$a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

2-й способ. Пусть хорда $AB = a_5$. Проведя радиусы OA и OB, и в тр-ке AOB опустим перпендикуляр BC. По теореме «квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на проекцию третьей стороны», имеем: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot AC$ или $a_5^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot OC = 2r^2 - 2r \cdot OC$. Но $OC = {}^1/_2\, a_{10}$. В самом деле: проведем BD параллельно AO, тогда дуга BD равна полуокружности без удвоенной дуги AB, т.-е., $180^0 - \frac{2 \cdot 360^0}{5}$ или 36^0, а хорда BD, опирающаяся на дугу в 36^0 или ${}^1/_{10} \cdot 360^0$, есть сторона правильного вписанного 10-угольника. Отрезок CO равен $BE = \frac{BD}{2} = \frac{a_{10}}{2}$, ибо, опустив перпендикуляр OE на хорду BD, разделим BD пополам, т.-е., $BE = \frac{BD}{2}$, а $CO = BE$, как параллельная между параллельными.

Следовательно, $a_5^2 = 2r^2 - 2r \cdot OC = 2r^2 - 2r \cdot \frac{a_{10}}{2} = 2r^2 - r \cdot a_{10} =$

$= 2r^2 - r \cdot \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{r^2}{2}(5-\sqrt{5})$, или $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

539. 1-й способ. Соединим точки E и C. Из прямоугольного тр-ка OEC определим гипотенузу EC:

$$EC = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

Отрезок $OF = EF - OE$; но $EF = EC = \frac{r}{2}\sqrt{5}$; следовательно, $OF = EF - OE = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, а это и есть выражение для стороны правильного вписанного 10-угольника. Хорду CF определим, как гипотенузу тр-ка OCF:

$$CF = \sqrt{OC^2 + OF^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Последнее выражение, как видно из зад. 538, определяет величину стороны правильного вписанного 5-угольника.

2-й. способ. Величину CF можно определить также и из тр-ка ECF, как сторону, лежащую против острого угла CEF: $CF^2 = EC^2 + EF^2 - 2EF \cdot EQ$, где $EC = EF = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, а $OE = \frac{r}{2}$; получим: $CF = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

540. *а.* 1) Длина диагонали $AB = AB_1$ определяется, как сторона правильного вписанного квадрата, и равна $r\sqrt{2}$. Диагональ AD есть диаметр окружности — $2r$.

Диагональ $AC = AC_1$ определится из прямоугольного тр-ка ACD ($\angle ACD$ — прямой, как опирающийся на диаметр):

$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2}$; но $AD = 2r$, а $CD = a_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (зад. 530); следовательно, $AC = \sqrt{(2r)^2 - r^2(2-\sqrt{2})} = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Примечание. Если из центра O опустим перпендикуляр OM, то из подобия прямоугольных тр-ков ACD и OMD имеем: $\frac{AC}{OM} = \frac{2r}{r}$, откуда $AC = 2OM$; но $OM = k_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (зад. 531); следовательно, $AC = 2OM = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) По зад. 532, $r = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Как видно из п. 1, диагональ $AB = AB_1 = r\sqrt{2}$. По подстановке, получим $AB = r\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Диагональ $AD = 2r = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Диагональ $AC = AC_1 = r\sqrt{2+\sqrt{2}} =$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a}{2}(2+\sqrt{2})\sqrt{2} = a(\sqrt{2}+1).$$

b. Диагонали в правильном 12-угольнике попарно равны в верхней и нижней полуокружностях; так, $AB_1 = AB$, $AC_1 = AC$ и т. д.

1) Диагональ $AB = a_6 = r$.

Диагональ $AC = a_4 = r\sqrt{2}$.

Диагональ $AD = a_3 = r\sqrt{3}$.

Диагональ $AF = 2r$.

Диагональ AE определится из прямоугольного тр-ка AEF ($\angle AEF$ прямой, так как опирается на диаметр), в котором гипотенуза $AF = 2r$, а второй катет EF — сторона правильного 12-угольника и равен (зад. 530) $a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$; итак,

$$AE = \sqrt{AF^2 - EF^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2(2-\sqrt{3})} = r\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Мы можем иначе определить AE. Проведем OM перпендикулярно EF; тогда получим подобные тр-ки AEF и OMF, из подобия которых следует: $\frac{AE}{OM} = \frac{AF}{OF} = \frac{2r}{r} = 2$, откуда $AE = 2OM$; но $OM = k_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (зад. 531); следовательно, $AE = 2OM = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

2) По зад. 532, $r = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Подставив в выражения п. 1 значение r, получим величины диагоналей, выраженные через a.

Диагональ $AB = r = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

Диагональ $AC = r\sqrt{2} = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = a(\sqrt{3}+1)$ [см. примеч. к зад. 530].

Диагональ $AD = r\sqrt{3} = a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = a\sqrt{3(2+\sqrt{3})}$.

Диагональ $AE = r\sqrt{2+\sqrt{3}} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = a(2+\sqrt{3})$.

Диагональ $AF = 2r = 2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Диагонали, лежащие во 2-й полуокружности, выражаются теми же величинами.

541. Все диагонали в правильном 5-угольнике равны между собой, так как являются хордами, стягивающими равные дуги, именно $^2/_5$ окружности.

Чтобы вычислить длину диагонали AC, опишем из точки A, как из центра, радиусом, равным AC, окружность (показано пунктиром). Вписанный угол CAD измеряется половиной дуги CD

(данной окружности), т.-е. половиной $^1/_5$ окружности и равен, следовательно, $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 36^\circ$. А потому в окружности (пунктирной) хорда CD, стягивающая $^1/_{10}$ окружности, будет стороной правильного 10-угольника. По формуле, $a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; следовательно,

$$AC = r = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2a(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

542. Проведем диаметр AF и соединим между собой точки C и F. Из прямоугольного тр-ка ACF, в котором гипотенуза $AF = 2r$, а катет $CF = a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, определим искомую диагональ AC, служащую вторым катетом:

$$AC = \sqrt{AF^2 - CF^2} = \sqrt{(2r)^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

543. Стороны правильных одноименных многоугольников относятся, как радиусы или апофемы. Если во вписанный правильный n-угольник впишем одноименный, как указано в условии задачи, то радиус OK нового n-угольника является одновременно и апофемой первичного. Следовательно, сторона искомого n-угольника найдется из пропорции:

$$\frac{x}{a_n} = \frac{k_n}{r}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{a_n \cdot k_n}{r}.$$

1) Сторона правильного 6-угольника $a_6 = r$, апофема его $k_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (зад. 534); следовательно, $x = r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} : r = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

2) Сторона правильного 8-угольника $a_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ (зад. 530), а апофема его $k_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (зад. 531). Следовательно,

$$x = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} : r = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

3) Сторона правильного 12-угольника $a_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (зад. 530), апофема его $k_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ (зад. 531). Следовательно,

$$x = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} : r = \frac{r}{2}.$$

544. 1) Диагональ AC полученного квадрата равна $OA + OC$, но $OA = OC = k_8$; следовательно, $AC = 2k_8 = 2 \cdot \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$ [см. зад. 533] или $AC = a(\sqrt{2}+1)$.

Искомая сторона квадрата определится, как катет равнобедренного тр-ка, гипотенуза которого равна $a(\sqrt{2}+1)$. Итак, пусть $AB = BC = x$; тогда $x^2 + x^2 = a^2(\sqrt{2}+1)^2$, откуда $AB = x = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$.

2) Так же, как и в п. 1, диагональ образовавшегося 6-угольника равна двойной апофеме данного 12-угольника. Апофема $k_{12} = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$ [зад. 533]. Следовательно, диагональ 6-угольника $= 2 \cdot \frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$ или $a(2+\sqrt{3})$. Но диагональ правильного 6-угольника, проходящая через центр, одновременно является и его диаметром; следовательно, $r = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. Последнее выражение и есть величина стороны полученного 6-угольника, ибо в правильном 6-угольнике $r = a_6$.

545. Как видно из чертежей, апофема данного n-угольника равна апофеме полученного, через срезывание углов, $2n$-угольника.

Чтобы доказать это, достаточно заметить, что середины сторон данного и образовавшегося $2n$-угольника совпадают. Центр каждого правильного многоугольника лежит на пересечении апофем; апофемы же—перпендикуляры, восставленные из середины стороны. Следовательно, точки пересечения перпендикуляров, восставленных из середин сторон, совпадают, т.-е. совпадают центры данного и полученного многоугольников.

1) По зад. 533, $k_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Пусть искомая сторона правильного 6-угольника x, тогда апофема его $k_6 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ (зад. 533). Но, в данном случае, $k_3 = k_6$, т.-е. $\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{a}{3}$.

2) По зад. 533, $k_4 = \frac{a}{2}$. Пусть искомая сторона правильного 8-угольника x, тогда апофема его (зад. 533) $k_8 = \frac{x}{2}(\sqrt{2}+1)$. Но, в данном случае, $k_4 = k_8$, т.-е. $\frac{a}{2} = \frac{x}{2}(\sqrt{2}+1)$,. откуда $x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2}-1)$.

3) По зад. 533, $k_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Пусть искомая сторона правильного 12-угольника x, тогда апофема его (зад. 533) $k_{12} = \frac{x}{2}(2+\sqrt{3})$. Но, в данном случае $k_6 = k_{12}$, т.-е., $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}(2+\sqrt{3})$, откуда $x = \frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = a(2\sqrt{3}-3)$.

546. 1) Радиус r_1 вписанной в правильный тр-к окружности вдвое меньше радиуса r описанной, т.-е. $r_1 = \frac{r}{2}$.

Из теории известно, что сторона вписанного в круг (радиуса r_1) квадрата равна $r_1\sqrt{2}$ или $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ $\left(\text{т. к. } r_1 = \frac{r}{2}\right)$.

2) Радиус внутренней окружности получится из формулы $a_3 = r\sqrt{3}$, откуда $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$; сторона квадрата, описанного около круга, равна его диаметру, т.-е. $a_4 = 2r = \frac{2a}{\sqrt{3}}$; радиус описанного около квадрата круга равен $\frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(Выражение $R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}$ получим из известной формулы $a_4 = R\sqrt{2}$).

547. 1) Расстояние между центрами равно сумме или разности апофем квадрата и тр-ка, т.-е. $OO_1 = OK \pm O_1K$ (в зависимости от взаимного расположения фигур).

Апофема квадрата $k_4 = \frac{a}{2}$; апофема правильного тр-ка $k_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ (зад. 533). Следовательно, $OO_1 = OK \pm O_1K = k_4 \pm k_3 = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{6}(3 \pm \sqrt{3})$.

2) Пусть O и O_1 центры данных окружностей. Хорда AB в окружности O служит стороной правильного 12-угольника, ибо стягивает дугу в $30° = \frac{360°}{12}$, а OC апофемой; с другой стороны, AB служит стороной правильного вписанного 6-угольника, ибо стягивает дугу в $60° = \frac{360°}{6}$, а O_1C его апофемой. Согласно задаче 533, $k_{12} = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$ и $k_6 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Искомое расстояние $OO_1 = OC - O_1C = k_{12} - k_6 = \frac{a}{2}(2+\sqrt{3}) - \frac{a}{2}\sqrt{3} = a$.

548. Если обозначить сторону данного правильного тр-ка через a, тогда $BD = {}^2/_3 a$, $BE = {}^1/_3 a$, т.-е., $\frac{BD}{DE} = 2$; но $\angle B = 60°$, следовательно, если опустить из D перпендикуляр на сторону BC, то (зад. 67) проекция BD на BC будет равна ${}^1/_2 BD$, т.-е., отрезку BE. Итак, DE перпендикулярна к BE и равна:

$$DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^2} = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Но $a_3 = r\sqrt{3}$ (что известно из теории); следовательно,

$$DE = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = r.$$

549. Вновь образовавшийся тр-к DEF тоже правильный, ибо $DF = DE = EF$ (что следует из равенства тр-ков ADF, BED и EFC) и каждая сторона его равна радиусу описанного круга (согласно зад. 548), т.-е., $DE = DF = EF = r$; но $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (из формулы $a_3 = r\sqrt{3}$). Радиус круга, описанного около тр-ка DEF, равен $\frac{r\sqrt{3}}{3}$ (так как r сторона тр-ка DEF), т.-е., $\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}$, а искомый радиус вписанного круга равен половине радиуса описанного, т.-е., $x = \frac{a}{2\cdot 3} = \frac{a}{6}$.

550. I. 1-й способ. Тр-к A_1BB_1 — равносторонний, так как $\angle B = 60°$, а $BA_1 = BB_1$ (хорды AC и FD параллельны, ибо дуги, заключенные между ними, равны; прямая AC, параллельная FD, отсекает от равных сторон FB и BD равные части). Следовательно, $A_1B = BB_1 = A_1B_1$. Но тр-ки A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 и т. д. равны между собою (что легко доказать наложением фигуры, напр., входящей в сегмент AEC, на фигуру сегмента BFD). А потому $AA_1 = A_1B_1 = B_1C$, т.-е. $AA_1 = \frac{AC}{3}$; но AC сторона правильного вписанного тр-ка и равна $r\sqrt{3}$; следовательно, $AA_1 = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

2-й способ. Апофема OK полученного правильного 6-угольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ является апофемой и правильного вписанного тр-ка ABC, равной $\frac{r}{2}$. Апофема правильного 6-угольника $k_6 = \frac{a_6}{2}\sqrt{3}$ (зад. 533); следовательно, $\frac{a_6}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$, откуда $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{3}$, т.-е., $A_1B_1 = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. Но ABB_1 — равносторонний тр-к ($\angle B = 60°$, $A_1B = BB_1$); значит, $A_1B = A_1B_1 = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

II. Тр-ки A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 и т. д. равны между собой; каждый из них представляет собой прямоугольный равнобедренный тр-к, ибо $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и т. д. прямые, как углы квадратов $ACEG$ и $BDFH$, а $A_1B = BB_1$, что легко доказать наложением соответственных сегментов с вписанными в них фигурами, напр., сегменты $HABCD$ и $BCDEF$. Значит, все стороны звезды равны между собой, именно $AA_1 = A_1B = BB_1$ и т. д.

Пусть одна из искомых сторон $A_1B = x$, тогда $A_1B_1 = A_1B\sqrt{2} = x\sqrt{2}$ (как гипотенуза равнобедренного тр-ка);

$$AC = AA_1 + A_1B_1 + B_1C = x + x\sqrt{2} + x = x(2 + \sqrt{2}) = x\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1);$$

с другой стороны, AC, как сторона квадрата, равна $r\sqrt{2}$.

Значит, $x\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = r\sqrt{2}$, откуда $x = \frac{r}{\sqrt{2} + 1} =$

$$= \frac{r(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = r(\sqrt{2} - 1).$$

551. 1) Пусть $\angle AOB = 108°$, тогда $\angle ABO = \angle BAO = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$. Отложим $\angle AOC = 36°$, тогда $\angle BOC = 108° - 36° = 72°$. Следовательно, тр-ки ACO и BCO равнобедренные, т.-е. $BC = BO = r$, $AC = CO$. Рассматривая равнобедренный тр-к OBC, у которого угол B при вершине равен 36°, заключаем, что, описав окружность радиусом, равным OB, из B, как из центра, получим величину хорды OC, как стороны правильного вписанного 10-угольника, равной $\frac{OB}{2}(\sqrt{5}-1)$ или $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$; следовательно,

$$AC = OC = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Искомая хорда $AB = AC + CB = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$ $AB = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$.

2) Пусть $\angle AOB = 135°$. Продолжим радиус OB и опустим на него перпендикуляр AC. Угол $AOC = 180° - 135° = 45°$. Из прямоугольного тр-ка AOC, с острым углом в 45°, определим катет OC (зад. 62): $OC = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Хорду AB определим, как сторону тр-ка AOB, лежащую против тупого угла. Итак,

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2OB \cdot OC = r^2 + r^2 + 2r \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2(2+\sqrt{2}),$$

откуда $AB = r\sqrt{2+\sqrt{2}}$

3) Как и в п. 2 этой задачи,

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2OB \cdot OC.$$

Но $OC = \frac{OA}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (зад. 67); следовательно,

$AB^2 = r^2 + r^2 + 2r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = r^2(2+\sqrt{3})$, откуда $AB = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

552. Очевидно, диагонали, расположенные в правой и левой полуокружностях, равны между собой.

Диагональ $AC = a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (зад. 538). Диагональ AD определится из прямоугольного тр-ка ADF, в котором $AF = 2r$, а катет $DF = a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (зад. 538): $AD = \sqrt{AF^2 - DF^2} =$

$$= \sqrt{(2r)^2 - \frac{r^2}{4}(10-2\sqrt{5})} = \frac{r}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Диагональ AE выразится, как катет прямоугольного тр-ка, у которого гипотенуза $AF = 2r$, а катет $FE = a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$:

$$AE = \sqrt{AF^2 - FE^2} = \sqrt{(2r)^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Диагональ $AF = 2r$.

553. Тр-к ABC равнобедренный, с углами $BAC = ACB = 36°$ (измеряются половиной дуги, равной $^1/_5$ окружности, как вписанные углы); тр-к ABF тоже равнобедренный, так как $\angle BAC = \angle ABE = 36°$ (по той же причине, что и $\angle BAC$ и $\angle ACB$). Следовательно, тр-ки ABC и ABF подобны, а потому можем написать пропорцию: $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AF}$. Тр-к BCF тоже равнобедренный (угол EBC измеряется $^1/_5$ окружности, как вписанный угол, опирающийся на дугу $CDE = {}^2/_5$ окружности; угол BFC тоже измеряется полусуммой дуг BC и AE, т.-е. $^1/_5$ окружности) и $BC = CF$; но $AB = BC$ (из тр-ка ABC), а потому $AB = CF$. Пропорция перепишется так: $\frac{AC}{CF} = \frac{CF}{AF}$.

554. Тр-ки ABF, ABG и BFG равнобедренные, т.-е. $AB = AF$, $AG = BG$ и $BG = BF$; угол ABG равен углу GBF, т.-е. BG есть биссектриса угла ABF.

Докажем это.

Угол ABD равен углу AFB, ибо первый измеряется половиной дуги AED, т.-е. $^1/_5$ окружности, а второй измеряется полусуммой дуг $AB + CD$, т.-е. тоже $^1/_5$ окружности. Значит, тр-к ABF—равнобедренный.

Угол BAC равен углу ABE, так как оба измеряются половиной равных дуг BC и AE. Значит, тр-к ABG — равнобедренный.

Угол BGC равен углу AFB, ибо оба измеряются полусуммой равных дуг: $^1/_2$ $(AE + BC)$ и $^1/_2$ $(AB + CD)$; следовательно, тр-к BFG равнобедренный.

Угол ABE равен углу EBD, ибо оба вписаны в равные дуги AE и ED, т.-е. BG есть биссектриса угла ABF.

На основании теоремы о биссектрисе, имеем (из тр-ка ABF): $\frac{GF}{AG} = \frac{BF}{AB}$. Но GF искомая сторона,—обозначим ее через x; $AG = AF - FG = AB - FG = a - x$; $BF = BG = a - x$; следовательно, пропорция перепишется так:

$$\frac{x}{a - x} = \frac{a - x}{a}, \text{ или } x^2 - 3ax + a^2 = 0.$$

Решив это квадратное ур-ие, находим: $x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2}}{2}$. Искомая сторона $GF = x = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2}$. Второй корень задаче не удовлетворяет.

555. 1) Углы соответственно равны: $\frac{180^\circ}{1+2+3}$, $\frac{180^\circ}{1+2+3} \cdot 2$, $\frac{180^\circ}{1+2+3} \cdot 3$, или 30°, 60° и 90°. Значит, тр-к прямоугольный и, согласно зад. 67, находим: если обозначить гипотенузу через a, то один катет (против угла в 30°) равен $\frac{a}{2}$, а второй катет — $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Следовательно, соотношение сторон такое:

$$\frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{3} : \frac{2a}{2} = 1 : \sqrt{3} : 2.$$

2) Углы соответственно равны: $\frac{180^\circ}{3+4+5} \cdot 3$, $\frac{180^\circ}{3+4+5} \cdot 4$, $\frac{180^\circ}{3+4+5} \cdot 5$ или 45°, 60°, 75°.

Опишем около этого тр-ка окружность, и пусть радиус этой окружности — r. Пусть $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BAC = 75^\circ$, тогда дуга $AB = 90^\circ$, дуга $AC = 120^\circ$, дуга $BC = 150^\circ$. Следовательно, хорда AB — сторона вписанного квадрата $= r\sqrt{2}$; хорда AC — сторона правильного вписанного тр-ка $= r\sqrt{3}$; хорда $BC = r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (зад. 551, п. 3).

Итак, соотношение сторон тр-ка таково:

$$r\sqrt{2} : r\sqrt{3} : r\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

556. Обозначим радиус круга через r. Пусть точки F и G — середины хорд AC и BC.

Очевидно, тр-ки ABC и CFG подобны, и справедлива пропорция: $\frac{FG}{AB} = \frac{FC}{AC}$, или $\frac{FG}{2r} = \frac{1}{2}$, откуда $FG = r$.

Хорда $AC = r\sqrt{2}$, как сторона квадрата, ибо дуга AC равна $^1/_4$ окружности, а $AF = FC = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Произведения отрезков хорд, пересекающихся в одной точке, равны между собою; следовательно,

$$AF \cdot FC = DF \cdot FE, \text{ или } AF \cdot FC = DF(FG + GE).$$

Подставив значения отрезков, перепишем равенство:

$$\frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = c \cdot (r + c) \text{ или } r^2 - 2cr - 2c^2 = 0.$$

Решив это квадратное ур-ие, получим: $r = c \pm \sqrt{c^2 + 2c^2}$ или $r = c + c\sqrt{3} = c(1 + \sqrt{3})$.

Второй корень—отрицательный, и не удовлетворяет поэтому условию задачи.

557. Хорда AB, стягивающая дугу в 120°, есть сторона правильного вписанного тр-ка, а OM — апофема его, равная $\frac{r}{2}$; значит, и $MG = \frac{r}{2}$, т.-е., $h = \frac{r}{2}$, откуда $r = 2h$.

Пусть $CE = x$, тогда $EF = 4x$. Соединив центр O с E, получим прямоугольный тр-к OEK, в котором $OE = r = 2h$, $EK = \frac{EF}{2} = 2x$, $OK = OM + MK = \frac{r}{2} + x = h + x$. Найдем зависимость между сторонами этого тр-ка: $EO^2 = EK^2 + OK^2$ или $(2h)^2 = (2x)^2 + (h + x)^2$ или $5x^2 + 2hx - 3h^2 = 0$. Решив это квадратное ур-ие, находим: $x = \frac{-2h \pm \sqrt{(2h)^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3h^2}}{2 \cdot 5} = -\frac{2h \pm 8h}{10}$.

Принимаем $x = \frac{3}{5}h$.

558. Соединив последовательно центры этих кругов, получим правильный n-угольник (касательных кругов — n), со сторонами $2R$ (R — радиус касательных окружностей). Радиус этого n-угольника равен $r + R$.

1) Полученный n-угольник есть 3-угольник. Радиус его $r + R$, сторона $2R$. Зависимость между стороной и радиусом правильного тр-ка такова: $a_3 = R_3\sqrt{3}$, т.-е., $2R = (r + R)\sqrt{3}$ или $R(2 - \sqrt{3}) = r\sqrt{3}$, откуда $R = \frac{r\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = r\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) = r(3 + 2\sqrt{3})$.

2) Получается правильный 4-угольник, т.-е. квадрат. Радиус его $r+R$, сторона—$2R$. Зависимость между стороной и радиусом квадрата $a_4 = R_4\sqrt{2}$; следовательно, $2R=(r+R)\sqrt{2}$, или $R(2-\sqrt{2})=r\sqrt{2}$, откуда $R=\frac{r\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=$ $=r(\sqrt{2}+1)$.

3) Получается правильный 6-угольник. Радиус его $R+r$, сторона $2R$. Но сторона правильного 6-угольника равна его радиусу, т.-е. $2R=R+r$, откуда $R=r$.

4) Получается правильный 10-угольник. Радиус его $r+R$, сторона $2R$. Зависимость между стороной и радиусом правильного 10-угольника $a_{10}=\frac{R_{10}}{2}(\sqrt{5}-1)$, т.-е. $2R=\frac{(r+R)}{2}(\sqrt{5}-1)$, откуда $R=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{5-\sqrt{5}}=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\frac{r}{\sqrt{5}}$.

559. Пусть радиус кругов R. Очевидно, все касательные равны между собой. Касательная AC определится по теореме (касательная есть средняя пропорциональная между секущей и внешней ее частью):

$AC^2=AB\,.\,AK$, или $AC^2=4R\,.\,2R=8R^2$, откуда $AC=R\sqrt{8}$.

Проведем радиус O_1C. Прямоугольные тр-ки AO_1C и ADK, имеющие общий острый угол CAO_1 подобны между собой. Из подобия этих тр-ков следует:

$$\frac{DK}{O_1C}=\frac{AK}{AC},\text{ или }\frac{DK}{R}=\frac{2R}{R\sqrt{8}},\text{ откуда }DK=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Четыреугольник $ADBE$ — ромб, и диагональ DE пересекается в точке K пополам, т.-е. $DE=2DK=R\sqrt{2}$.

Последнее выражение и есть величина стороны вписанного в круг (радиуса R) квадрата.

Площади прямолинейных фигур.

1. Площадь квадрата, прямоугольника и параллелограма.

560. Площадь квадрата равна квадрату стороны его.

1) 1 *м* 7 *дм* равен 17 *дм*. Площадь квадрата равна 17 . 17 *кв. дм* = = 289 *кв. дм* или 2,89 *кв. м*.

2) 25 . 25 *кв. дм* = 6,25 *кв. м*.

3) 0,5 . 0,5 *кв. м* = 0,25 $м^2$.

561. Задача, обратная зад. 560. Сторона квадрата равна корню квадратному из его площади.

1) $\sqrt{11664\ м^2} = 108\ м$. 2) $\sqrt{4{,}84\ м^2} = 2{,}2\ м$. 3) $\sqrt{20\ м^2} = 4{,}47\ м$ (прибл.).

562. 1) Пусть сторона квадрата x, тогда диагональ его l определится, как гипотенуза равнобедренного прямоугольного тр-ка с катетами x, т.-е. $l^2 = 2x^2$, откуда $x^2 = \frac{l^2}{2}$; но x^2 и есть площадь искомого квадрата, равная $\frac{l^2}{2}$.

2) Площадь квадрата равна a^2 (обозначая через a его сторону). Но $a = r\sqrt{2}$ (по теореме); следовательно, $a^2 = 2r^2$.

3) Сторона описанного квадрата равна $2r$, а площадь его равна $a^2 = (2r)^2 = 4r^2$. Сторона вписанного квадрата (по теореме) равна $r\sqrt{2}$, а площадь его — $(r\sqrt{2})^2 = 2r^2$. Искомое отношение равно: $4r^2 : 2r^2 = 2$.

563. Пусть $EFGH$ искомый квадрат, вписанный в данный: прямоугольные тр-ки BGF и CGH равны между собой, так как гипотенузы FG и GH равны, как стороны квадрата, а острые углы BGF и CHG тоже равны, т. к. стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла [если $\angle BGF = \alpha$, то $\angle CGH = 90° - \alpha$ (принимая во внимание, что $\angle FGH = d$), а $\angle CHG = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$]. Из равенства прямоугольных тр-ков BGF и CGH следует, что $BG = CH$. — Пусть $BF = x$, тогда $BG = a - x$ (ибо $BF = GC = HD = AE$). Сторона вписанного квадрата GF определится, как гипотенуза прямоугольного тр-ка BGF:

$$GF = \sqrt{BG^2 + BF^2} = \sqrt{(a-x)^2 + x^2}.$$

Площадь же квадрата равна $GF^2 = (a-x)^2 + x^2$; но $GF^2 = \frac{5}{8}a^2$ (по условию); следовательно, $(a-x)^2 + x^2 = \frac{5}{8}a^2$, или

$$16x^2 - 16ax + 3a^2 = 0.$$

Решив это квадратное ур-ие, находим: $x = \frac{16 \pm 8}{32}a$; принимаем либо $x_1 = \frac{1}{4}a$, либо $x_2 = \frac{3}{4}a$, что одно и то же для нахождения положения вершин вписанного квадрата.

564. а) Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

1) $2{,}7 \cdot 10 = 27$ *кв. м*. 2) Приводим выражения длин к одной мере: $5\ м = 50\ дм$; $2\ м\ 8\ дм = 28\ дм$; площадь прямоугольника равна $50 \cdot 28 = 1400$ *кв. дм* $= 14\ м^2$.

b) Так как площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту, следовательно, и обратно: высота равна частному от деления площади на основание:

$4{,}8 м^2 : 12\ дм$, т. е., $480\ дм^2 : 12\ дм = 40\ дм$, или $4\ м$.

565. 1) Пусть стороны прямоугольника $4x$ и $9x$, тогда площадь его $4x \cdot 9x = 144\ м^2$, откуда $x = 2\ м$, а стороны прямоугольника $4x = 8\ м$ и $9x = 18\ м$.

2) Если периметр прямоугольника $74\ дм$, то сумма 2-х смежных сторон, равная полупериметру, содержит $37\ дм$. Пусть основание x, тогда высота равна $37 - x$, а площадь $x(37 - x) = 300\ дм^2$. Последнее ур-ие перепишем так: $x^2 - 37x + 300 = 0$. Решив это ур-ие, найдем: $x_1 = 12\ дм$, $x_2 = 25\ дм$.

566. Надо найти квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника, т.-е., $72 \cdot 8 = 576\ м^2$.

Искомая сторона квадрата равна $\sqrt{576} = 24\ м$.

567. Если периметр внутреннего прямоугольника равен $36\ см$, то полупериметр — сумма смежных сторон—равен $18\ см$. Пусть основание внутреннего прямоугольника x, тогда высота его равна $18 - x$. Стороны внешнего прямоугольника, очевидно, равны $x + 6$ и $18 - x + 6$, или $24 - x$, так как стороны внешнего прямоугольника больше сторон внутреннего на двойное расстояние $(3 + 3)\ см$. Площадь, заключенная между прямоугольниками, равна разности их площадей, т.-е., $(x + 6)(24 - x) - x(18 - x) = 144\ см^2$.

568. 1) Пусть сторона квадрата $AB = AH + HB = a + b$. Площадь квадрата $ABCD = (a + b)^2$. Проведя прямые HG и KF, параллельные сторонам квадрата, получим квадрат $AHEK = a^2$, квадрат $EGCF = b^2$ и два равных прямоугольника $HBFE$ и $KEGD$ со сторонами a и b, площадь каждого из которых равна ab. Следовательно, площадь квадрата $ABCD$, равная сумме площадей 4-х фигур, подтверждает алгебраическую формулу

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

2) Пусть сторона квадрата $AH = AB - BH = a - b$. Площадь квадрата $AHEK = (a - b)^2$.

Очевидно, площадь $AHEK$ получится, когда из площади $ABCD$ вычтем сумму площадей прямоугольников $KFCD$ и $HBFE$.

Площадь квадрата $ABCD = a^2$; площадь прямоугольника $KFCD = DC \cdot FC = ab$, площадь прямоугольника $HBFE$ равна разности площадей прямоугольника $HBCG$ и квадрата $EFCG$, т.-е. $ab - b^2$. Итак, площадь квадрата $AHEK = (a - b)^2$, или $AHEK = a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - 2ab + b^2$. Следовательно, формула $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ подтверждается наглядно.

3) Пусть $AE = a$, $EB = b$, $CG = EB = b$; тогда площадь прямоугольника $ABDC = (a + b)(a - b)$. Эта площадь состоит из суммы площадей $AEFC + EBDF$. Если вместо $EBDF$ к площади $AEFC$ прибавить равную ей $MKLF = CFLG - CMGK$, то получим $AEFC + CFLG - CMGK$; но $AEFC + CFLG =$ квадрату $AELG = a^2$, $CMKG$ — квадрат, равный b^2; следовательно, $ABDC = AEFC + CFLG - CMKG = a^2 - b^2$, или $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, что и является наглядным подтверждением формулы.

569. Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов смежных сторон. Пусть стороны прямоугольника x и y; тогда $x^2 + y^2 = 305^2$. Площадь прямоугольника $xy = 37128$.

Решим систему этих двух уравнений. Прибавим к первому уравнению удвоенное второе: $x^2 + y^2 + 2xy = 305^2 + 2 \cdot 37128$ или $(x + y)^2 = 167281$, откуда $x + y = 409$. По сумме и произведению составим квадратное ур-ие: $z^2 - 409z + 37128 = 0$; решив ур-ие, найдем $z_1 = 136$, $z_2 = 273$.

Искомый периметр равен $2(136 + 273) = 818$ *см*.

570. Площадь параллелограма равна произведению основания на высоту.

1) $36 \cdot 8 = 288$ *см*^{2}; 2) $24 \cdot 75 = 1800$ *дм*^{2}, или 18 *м*^{2}.

571. Пусть $BE = 12$ *см*. Полупериметр параллелограма $\frac{112}{2} = 56$ *см* есть сумма смежных сторон его. Пусть одна сторона $AD = x$, тогда вторая сторона его $CD = 56 - x$. Площадь параллелограма $AD \cdot BE = 480$ *см*^{2} или $x \cdot 12 = 480$, откуда

$$x = 480 : 12 = 40 \text{ см}.$$

Но и $CD \cdot BF$ тоже выражает площадь его; следовательно, $(56 - x)\,BF = 480$ *см*^{2}, или $(56 - 40)\,BF = 480$ *см*^{2}, откуда

$$BF = \frac{480}{16} = 30 \text{ см}.$$

572. Тр-ки ABE и BCF (черт. 571) подобны между собой, как прямоугольные тр-ки, имеющие по равному углу ($\angle A = \angle C$). Из подобия этих треугольников находим отношение сторон: $AB : BC = BE : BF = h : h_1$. Сумма этих сторон — AB и BC — равна полупериметру параллелограма p. Пусть $AB = x$, тогда $BC = p - x$. Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{p - x} = \frac{h}{h_1}$, откуда $x = \frac{ph}{h + h_1}$.

Искомая площадь равна $AD \cdot BE$, или $CD \cdot BF = xh_1 = \frac{phh_1}{h + h_1}$.

573. 1) Пусть $AD = a$, $AB = b$, угол $A = 30°$.

Площадь параллелограма — $AD \cdot BE$. Но $AD = a$, а $BE = \frac{b}{2}$ (зад. 67); следовательно, искомая площадь: $AD \cdot BE = \frac{ab}{2}$.

2) Пусть $AD = a$, $AB = b$, угол $A = 45°$.

Площадь параллелограма — $AD \cdot BE$. Но $BE = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ (зад. 62). следовательно, искомая площадь: $\frac{a \cdot b\sqrt{2}}{2}$.

3) Пусть $AD = a$, $AB = b$, угол $A = 60°$.

Площадь параллелограма — $AD \cdot BE$. Но $BE = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (зад. 67); следовательно, искомая площадь: $\frac{ab}{2}\sqrt{3}$.

574. Из тр-ка ABD определим сторону ромба, по теореме: „квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на проекцию второй стороны", т.-е. $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot ED$. Обозначим сторону ромба через x, тогда $AB = AD = x$; $BD = 13$ *м*; ED определится, как катет прямоугольного тр-ка EBD: $ED = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ *м*. Перепишем приведенную формулу: $x^2 = 13^2 + x^2 - 2x \cdot 5$ или $10x = 13^2$, откуда $x = 16{,}9$ *м*.

Искомая площадь ромба равна $AD \cdot BE = 16{,}9 \cdot 12 = 202{,}8$ *м*^{2}.

575. Опустим из вершины B перпендикуляр BF.

Перпендикуляры BF и DE, очевидно, параллельны; следовательно, $\frac{FD}{ED} = \frac{BD}{OD} = \frac{2}{1}$; но $ED = 14$ *дм*; следовательно, $FD = 28$ *дм*. Сторона параллелограма $AD = AE + ED = 26 + 14 = 40$ *дм*. В прямоугольном тр-ке ABF высота $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{AB^2 - (AD - FD)^2} = \sqrt{37^2 - (40 - 28)^2} = 35$ *дм*.

Искомая площадь параллелограма равна $AD \cdot BF = 40 \cdot 35 = 1400$ *дм*^{2} $= 14$ *м*^{2}.

576. Примечание. Проверим, действительно ли получается от соединительных прямых квадрат. Рассматривая тр-к BCF, замечаем, что $\angle CBF = \angle DCG$; но $\angle DCG + \angle GCB = d$, значит, и $\angle CBF + \angle GCB = d$, а потому в тр-ке BCL, у которого сумма 2-х углов ($CBF + GCB$) равна d, третий угол (BLC) тоже равен d (сумма углов тр-ка равна $2d$), т.-е. $CL \perp BL$. Стороны же $KL = LM = MN = NK$, ибо при любом наложении частей фигур соответственным образом, последние совпадут. Итак, 4-угольник $KLMN$—квадрат.

Пусть сторона искомого квадрата x, данного—a.

Рассматривая прямоугольный тр-к BCL, видим, что CL и EK, как перпендикуляры к BF, параллельны между собой; следовательно $\frac{BK}{KL}=\frac{BE}{EC}=\frac{1}{1}$, т.-е. $BK=KL\quad x$, $BL=2x$.

Подобным образом из тр-ка CDG замечаем, что $CL=LM=x$.

Из прямоугольного тр-ка BCL имеем: $BL^2+CL^2=BC^2$, или $(2x)^2+x^2=a^2$, откуда $x^2=\frac{a^2}{5}$. Но x^2 есть площадь искомого квадрата, a^2—площадь данного квадрата. Значит, площадь искомого квадрата равна $^1/_5$ площади данного.

577. Пусть отрезок $AF=m$, отрезок $BG=n$.

Если обозначим в прямоугольном тр-ке ABC угол A через α, то угол $B=90°-\alpha$. В прямоугольном тр-ке ADF мы имеем $\angle A=\alpha$, а в прямоугольном тр-ке EBG угол $B=90°-\alpha$, следовательно, $\angle BEG=90°-(90°-\alpha)=\alpha$. Значит, прямоугольные тр-ки ADF и EBG имеют по равному углу α; следовательно, они подобны. Из подобия этих тр-ков имеем: $\frac{DF}{BG}=\frac{AF}{EG}$; но $DF=EG=x$—стороне искомого квадрата; следовательно, пропорция перепишется так: $\frac{x}{n}=\frac{m}{x}$ или $x^2=mn$; так как x^2 есть выражение для квадрата, то его значение и есть mn.

578. Вследствие полнейшего однообразия в построении фигуры, внутренний квадрат имеет общую диагональ с внешним квадратом; $\angle DAE=45°$, т.-е. дуга $EHD=90°$; но дуга $AEHD=120°$; следовательно, дуга $AE=AEHD-DHE=120°-90°=30°$.

Так как дуги AE и DH равны между собой, то дуга $EH=\smile AEHD-\smile AE-\smile HD=120°-30°-30°=60°$, а EH, как хорда, стягивающая дугу $EH=60°$, есть сторона правильного вписанного 6-угольника.

Таким образом, AD, как хорда, стягивающая дугу в 120°, есть сторона правильного вписанного тр-ка, а EH—сторона правильного 6-угольника.

Отношение $\frac{EH}{AD}=\frac{a_6}{a_3}=\frac{r}{r\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, а отношение квадратов равно квадрату: $(1:\sqrt{3})^2$, т.-е. 1:3.

579. Пусть $AE=m$, $BF=n$.

Прямоугольные тр-ки AED и DBF подобны, т. к. $\angle EAD=\angle FDB$, как углы, составленные соответственно параллельными

сторонами и имеющие одинаковое направление от вершины. Следовательно, прямоугольные тр-ки AED и DBF имеют по равному острому углу, а потому они подобны.

Из подобия этих тр-ков следует: $\frac{ED}{BF} = \frac{AE}{DF}$, или $\frac{ED}{n} = \frac{m}{DF}$, откуда $ED \cdot DF = mn$.

Но площадь искомого прямоугольника $= ED \cdot DF$, следовательно, она равна mn.

580. Пусть стороны прямоугольника $DE = x$, $DG = y$.

Треугольники ABC и DEC подобны, ибо $DE \parallel AB$.

В подобных тр-ках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам: $\frac{DE}{AB} = \frac{CK}{CH}$, или $\frac{x}{30} = \frac{10-y}{10}$ (т. к. $CK = CH - KH = CH - DG = 10 - y$); последняя пропорция перепишется так: $x \cdot 10 = 30(10 - y)$, или $x + 3y = 30$ *см*. Но площадь прямоугольника $xy = 63$. Решив совместно эти два ур-ия, найдем x и y.

$x = 30 - 3y$; подставим это выражение для x во 2-е ур-ие: $(30 - y)y = 63$, или $y^2 - 10y + 21 = 0$.

Решив это квадратное ур-ие, получим: $y = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$; $y_1 = 7$, $y_2 = 3$; $x_1 = 30 - 3y = 9$, $x_2 = 21$.

581. Чтоб определить площадь параллелограма, необходимо знать основание и высоту. Тр-ки AFG и BFE имеют общий острый угол F и прямоугольны; следовательно, они подобны, и мы можем написать пропорцию: $\frac{AG}{BE} = \frac{AF}{BF}$; но $BE = 24$ *см*, $AF = AB + BF = 1$ *м* $+ 25$ *см* $= 125$ *см*; $BF = 25$ *см*. Пропорция перепишется так: $\frac{AG}{24} = \frac{125}{25}$, откуда $AG = 120$ *см*.

Прямоугольные тр-ки DOG и BOE, имеющие равные гипотенузы ($BO = OD$, так как диагонали взаимно делятся пополам) и равные острые углы (напр., $\angle ODG = \angle OBE$), равны, а потому $DG = EB = 24$ *см*. Сторона параллелограма

$$AD = AG + GD = 120 + 24 = 144 \text{ см}.$$

Высота параллелограма $EG = FG - FE$.

Но $FG = \sqrt{AF^2 - AG^2} = \sqrt{125^2 - 120^2} = 35$ *см*,

$FE = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$ *см*. Следовательно,

$$EG = FG - FE = 35 - 7 = 28 \text{ см}.$$

Искомая площадь равна $AD \cdot EG = 144 \cdot 28 = 4032$ *см*^{2}.

2. Площадь треугольника.

582. Площадь тр-ка равна половине произведения основания на высоту.

1) $\frac{32 \cdot 18}{2} = 288$ *см*²; 2) $\frac{5\ дм \cdot 4\ м}{2} = \frac{5\ дм \cdot 40\ дм}{2} = 100\ дм^2 =$ $= 1\ м^2$; 3) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}}{2} = 5$ кв. ед.

583. 1) Площадь прямоугольного тр-ка равна половине произведения катетов (или половине произведения гипотенузы на высоту, опущенную на гипотенузу).

Второй катет равен $\sqrt{313^2 - 312^2} = 25$ *см*. Искомая площадь тр-ка равна $\frac{312 \cdot 25}{2} = 3900\ см^2 = 39\ дм^2$.

2) Пусть катеты $9x$ и $40x$; площадь тр-ка равна $\frac{9x \cdot 40x}{2} =$ $= 720\ см^2$, или $180x^2 = 720\ см^2$, откуда $x = 2$ *см*; катеты равны: $9x = 18$ *см* и $40x = 80$ *см*.

Искомая гипотенуза равна $\sqrt{(9x)^2 + (40x)^2} = \sqrt{18^2 + 80^2} =$ $= \sqrt{6724} = 82$ *см*.

3) Смотри указание к п. 1 этой же задачи.

Пусть искомая высота h. Гипотенуза тр-ка равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Площадь тр-ка равна либо $\frac{ab}{2}$, либо $\sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{h}{2}$. Следовательно, $\frac{ab}{2} = \frac{h\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, откуда $h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

584. Площадь тр-ка равна половине произведения основания на высоту.

Пусть $AB = 3$ *см*, $AC = 8$ *см*, $BD = h$.

1) $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8h}{2} = 4h = 10\ см^2$, откуда $h = \frac{5}{2}$ *см*. Из чертежа видно (прямоугольный тр-к ABD), что $AB > BD$ (гипотенуза больше катета). Это неравенство возможно, ибо $AB = 3$, $BD = 2^1/_2$.

2) $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8h}{2} = 4h = 15\ см^2$, откуда $h = \frac{15}{4}$ *см*. Но $AB > BD$ (гипотенуза больше катета). Так как $AB = 3$, а $BD = 3^3/_4$, то это неравенство невозможно.

3) $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8h}{2} = 4h = 12$ *см*², откуда $h = 3$ *см*. $AB > BD$. Числовое значение: $AB = 3$ *см* и $BD = 3$ *см*; т.-е., хотя неравенство и отпадает, но AB сливается с BD, именно мы имеем прямоугольный тр-к с катетами 3 *см* и 8 *см*. Действительно, площадь этого прямоугольного тр-ка равна $\frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ *см*², что соответствует условию задачи.

585. Пусть катеты этого тр-ка x. Тогда $x^2 + x^2 = c^2$, откуда $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Площадь этого тр-ка равна половине произведения катетов, т.-е. $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c^2}{4}$.

Примечание. Всегда лучше решать задачу предварительно в общем виде, тогда можно избегнуть лишних действий.

Так, в данном случае, обозначаем катеты через x, тогда искомая площадь равна $\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$. Но зависимость между сторонами этого тр-ка $x^2 + x^2 = c^2$, откуда $x^2 = \frac{c^2}{2}$. Следовательно, площадь тр-ка $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$.

При таком решении избегается излишнее нахождение катетов, т.-е. нахождение величины x.

586. Пусть ABC равнобедренный тр-к, в котором $AC = BC = c$, $AB = b$. Высота CD определится из прямоугольного тр-ка ACD: $CD = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$. Площадь тр-ка ABC $= \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}}$, или $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2 - b^2}$.

1) Искомая площадь $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} =$

$= \frac{56}{2}\sqrt{100^2 - \frac{56^2}{4}} = 2688$ *см*².

Примечание. 1 *м* предварительно приводится к той мере, которой выражено и основание, в данном случае к 100 *см*. (Можно и наоборот, меру основания привести к мере, которой выражена другая сторона).

2) См. выведенную в начале формулу.

3) Искомая площадь $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{4c^2 - b^2} = \frac{20}{4}\sqrt{4 \cdot 11^2 - 20^2} =$
$= 10\sqrt{21} = 45{,}82\ldots$ *см*^{2}.

Можно, конечно, решать задачу последовательно, но рассуждения ничем не отличаются от приведенных в начале.

Высота CD определится из прямоугольного тр-ка ACD:

$$CD = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{11^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2} = \sqrt{21}$$

Площадь тр-ка равна $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{20 \cdot \sqrt{21}}{2} = 10\sqrt{21} =$
$= 45{,}82\ldots$ *см*^{2}.

587. 1) Высота CD определится из прямоугольного тр-ка ACD, в котором катеты $AC = a$, $AD = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ (в равнобедренном тр-ке высота делит основание пополам).

Высота $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Искомая площадь равностороннего тр-ка равна

$$\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

2) Как видно из п. 1, площадь равностороннего тр-ка выражается через сторону a так: $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Следовательно, $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = Q$, откуда $a = \sqrt{\frac{4Q}{\sqrt{3}}} =$
$= \frac{2}{3}\sqrt{3Q\sqrt{3}}$.

3) Как видно из п. 1, высота $CD = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Из равенства $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, находим $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

Площадь равностороннего тр-ка, выраженная через сторону a, равна $h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Заменяя a через $\frac{2h}{\sqrt{3}}$, получим выражение для искомой площади:

$$\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 \sqrt{3} : 4 = \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}.$$

588. 1) Из теории известно, что сторона правильного вписанного тр-ка $a_3 = r\sqrt{3}$.

Площадь равностороннего тр-ка выражается через сторону так (зад. 587, п. 1): $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Подставив вместо $a = r\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(r\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

2) Радиус вписанного в равносторонний тр-к круга равен половине радиуса описанного, т.-е. $r = {}^1/_2 R$. Но радиус описанного круга определяется из равенства: $a_3 = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $r = \frac{1}{2}R = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, отсюда $a = 2r\sqrt{3}$. Подставив в формулу для площади равностороннего тр-ка: $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (зад. 587, п. 1) значение $a = 2r\sqrt{3}$, получим искомую площадь

$$\frac{(2r\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3}.$$

589. Пусть $BD = 32$ *см*, $AD = 18$ *см*.

Так как высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, то $CD^2 = AD \cdot BD = 18 \cdot 32$, откуда $CD = \sqrt{18 \cdot 32} = 24$ *см*. Искомая площадь равна

$$\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{(AD + BD)CD}{2} = \frac{(18 + 32)24}{2} = 600 \text{ см}^2 = 6 \text{ дм}^2.$$

590. Пусть $AC = 85$, $BC = 60$, $CD = 36$.

Определяем отдельно отрезки AD и BD из прямоугольных тр-ков ACD и BCD: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{85^2 - 36^2} = 77$ *см*; $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{60^2 - 36^2} = 48$ *см*. Основание $AB = AD + BD = 77 + 48 = 125$ *см*.

Искомая площадь равна $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{125 \cdot 36}{2} = 2250$ *см*^{2}.

В случае, если тр-к тупоугольный, фигура принимает вид AB_1C, и площадь выразится так: $\frac{AB_1 \cdot CD}{2} = \frac{(AD - B_1D)CD}{2} =$

$= \frac{(77 - 48)36}{2} = 522$ *см*^{2}.

591. 1) Пусть $AC = a$, $AB = b$.

Высота BD тр-ка ABC определится, как катет прямоугольного тр-ка ABD. По зад. 67, $BD = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$.

Искомая площадь: $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{a \cdot b}{2 \cdot 2} = \frac{ab}{4}$.

2) Пусть $\angle A = 45°$, $AC = a$, $AB = b$. Высота BD определится, как катет равнобедренного тр-ка ABD. По зад. 62, $BD = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Искомая площадь: $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

3) Пусть $AC = a$, $AB = b$. Высота BD определится, по зад. 67, из прямоугольного тр-ка ABD, именно: $BD = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.

Искомая площадь: $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{ab}{4}\sqrt{3}$.

4) Пусть $\angle BAC = 120°$, $AC = a$, $AB = b$.

Угол $BAD = 180° - \angle BAC = 180° - 120° = 60°$. Высота BD определится из прямоугольного тр-ка ABD, именно: $BD = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (зад. 67).

Искомая площадь равна $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{ab}{4}\sqrt{3}$.

592. Пусть искомые катеты x и y. Тогда $x^2 + y^2 = 73^2$, $\frac{xy}{2} = 1320$ или $xy = 2640$. Решив систему этих ур-ий, найдем x и y. Для этого сложим ур-ие $x^2 + y^2 = 73^2$ с удвоенным вторым: $2xy = 5280$; $x^2 + y^2 + 2xy = 73^2 + 5280$ или $(x + y)^2 = 10609$. Извлечем квадратный корень из обеих частей; получим $x + y = 103$. По сумме 103 и произведению 2640 корней составим квадратное ур-ие: $z^2 - 103z + 2640 = 0$. Решив это ур-ие, получим

$$z = \frac{103 \pm \sqrt{103^2 - 4 \cdot 2640}}{2} = \frac{103 \pm 7}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{103+7}{2} = 55$ *см*, $y = \frac{103-7}{2} = 48$ *см*.

593. Пусть $AC = BC = 10$ *см*. Опустим перпендикуляр CD на AB. Имеем: $\frac{AB \cdot CD}{2} = 48$ *см*^{2}. Обозначим CD через x; тогда AD выразится, как катет тр-ка ACD:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{10^2 - x^2}.$$

Перепишем выражение для площади: $\frac{AB}{2} \cdot CD = AD \cdot CD = \sqrt{10^2 - x^2} \cdot x = 48$ *см*^{2}. Возведем обе части ур-ия в квадрат: $(100 - x^2)x^2 = 48^2$ или $x^4 - 100x^2 + 2304 = 0$. Решив это биквадратное ур-ие, найдем: $x = \pm\sqrt{50 \pm \sqrt{50^2 - 2304}}$, или $x_1 = 8$, $x_2 = 6$; $AD = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - 8^2} = 6$ *см*, $AB = 2AD = 12$ *см*, или $AD = \sqrt{100 - 6^2} = 8$ *см*, $AB = 2AD = 16$ *см*.

594. 1) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

В самом деле. Пусть диагонали AC и BD будут D и d. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся пополам. Площадь тр-ка $ABD = \frac{BD \cdot AO}{2} = \frac{Dd}{2 \cdot 2} = \frac{Dd}{4}$. Так как тр-ки ABD и BDC равны между собой, то площадь ромба равна удвоенной площади тр-ка ABD, т.-е. $\frac{Dd}{2}$. В данном случае площадь ромба равна $\frac{72 \cdot 40}{2} = 1440$ *кв. см*.

2) Рассматривая один из 4-х треугольников, напр., AOD, видим, что $AO \perp OD$, $AO = \frac{16}{2} = 8$ *м*, $OD = \frac{12}{2} = 6$ *м*.

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ м}.$$

Площадь ромба равна произведению основания AD на высоту BE, т.-е. $AD \cdot BE$, или (п. 1) половине произведения диагоналей, т.-е. $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Следовательно, $AD \cdot BE = \frac{AC \cdot BD}{2}$, или $10 \cdot BE = \frac{16 \cdot 12}{2}$, откуда $BE = 9{,}6$ *м*.

595. Пусть диагонали ромба mx и nx. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей (зад. 594, п. 1), т.-е. $\frac{mx \cdot nx}{2} = Q$,

отсюда $x = \sqrt{\frac{2Q}{mn}}$.

Сторона ромба определится, как гипотенуза из прямоугольного тр-ка (т. к. диагонали ромба взаимно перпендикулярны) AOB: $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2}$; но AO и BO суть половины диагоналей ромба, т.-е., $\frac{mx}{2}$ и $\frac{nx}{2}$; следовательно,

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(\frac{mx}{2}\right)^2 + \left(\frac{nx}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{m^2 + n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2Q}{mn}} \cdot \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{Q \cdot \frac{m^2 + n^2}{2mn}}.$$

596. Площадь тр-ка по его сторонам равна, как известно из теории, $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр тр-ка, a, b и c — стороны его.

1) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{13+14+15}{2} = 21$. Искомая площадь равна $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

2) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{29+25+6}{2} = 30$.

Искомая площадь тр-ка равна $\sqrt{30(30-29)(30-25)(30-6)} = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = 60$.

3) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{5+6+9}{2} = 10$.

Искомая площадь равна $\sqrt{10(10-5)(10-6)(10-9)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = 10\sqrt{2}$.

4) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{3+5+7}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Искомая площадь равна $\sqrt{7\frac{1}{2}(7\frac{1}{2}-3)(7\frac{1}{2}-5)(7\frac{1}{2}-7)} = \sqrt{7\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{3} = 6{,}49...$

5) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{6+5+2{,}2}{2} = 6{,}6$.

Искомая площадь равна $\sqrt{6{,}6(6{,}6-6)(6{,}6-5)(6{,}6-2{,}2)} = \sqrt{6{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 4{,}4} = 5{,}28$.

6) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{1}{2}(5 + 8\frac{2}{3} + 12\frac{1}{3}) = 13$.

Искомая площадь равна $\sqrt{13(13-5)(13-8\frac{2}{3})(13-12\frac{1}{3})} = \sqrt{13 \cdot 8 \cdot 4\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 17\frac{1}{3}$.

7) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{5+4+\sqrt{17}}{2}=\frac{9+\sqrt{17}}{2}$.

Искомая площадь равна

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}-5\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}-4\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}-\sqrt{17}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}-1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{9-\sqrt{17}}{2}}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(9^2-17)(17-1^2)}=8.$$

8) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{5+\sqrt{58}+\sqrt{65}}{2}$.

Искомая площадь равна

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{58}+\sqrt{65}}{2}\left(\frac{5+\sqrt{58}+\sqrt{65}}{2}-5\right)\left(\frac{5+\sqrt{58}+\sqrt{65}}{2}-\sqrt{58}\right)\left(\frac{5+\sqrt{58}+\sqrt{65}}{2}-\sqrt{65}\right)}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(\sqrt{58}+\sqrt{65})+5)]\,[(\sqrt{58}+\sqrt{65})-5]\,[5+(\sqrt{65}-\sqrt{58})]\,[5-(\sqrt{65}-\sqrt{58})]}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(\sqrt{58}+\sqrt{65})^2-5^2]\,[5^2-(\sqrt{65}-\sqrt{58})^2]}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(98+2\sqrt{58\cdot 65})(2\sqrt{58\cdot 65}-98)}=\tfrac{1}{4}\sqrt{4\cdot 58\cdot 65-98^2}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{15080-9604}=\tfrac{1}{4}\sqrt{5476}=\tfrac{1}{4}\cdot 74=18\tfrac{1}{2}.$$

9) Полупериметр тр-ка p равен $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}$.

Искомая площадь равна

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{10}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{13}\right)}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13})(\sqrt{10}+\sqrt{13}-\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{13}-\sqrt{10})(\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{13})}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(\sqrt{5}+\sqrt{10})+\sqrt{13}]\,[\sqrt{5}+\sqrt{10})-\sqrt{13})]\,[\sqrt{13}-(\sqrt{5}-\sqrt{10})]\,[\sqrt{13}+(\sqrt{5}-\sqrt{10})]}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(\sqrt{5}+\sqrt{10})^2-13]\,[13-(\sqrt{5}-\sqrt{10})^2]}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2\sqrt{50}+2)(2\sqrt{50}-2)}=\tfrac{1}{4}\sqrt{4\cdot 49}=3\tfrac{1}{2}.$$

597. 1) Если два прямоугольных тр-ка имеют равные острые углы, но гипотенузы разные, то в тр-ке, где гипотенуза больше, и катеты больше. В самом деле. Пусть (черт. *а*) прямоугольные тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$ имеют по одинаковому острому углу $A=A_1$, но гипотенуза $AB>A_1B_1$. При наложении тр-ка $A_1B_1C_1$ на тр-к ABC так, чтоб $\angle A_1$ совпал с углом A, точка B_1 совпадет с точкой B_2; следовательно, и точка C_1 совпадет с точкой C_2, т. е., катеты тр-ка $A_1B_1C_1$ меньше катетов тр-ка ABC.

Пусть в тр-ке ABC (черт. b) $AB = 25$, $AC = 29$, $BC = 36$. Опустим высоты AE и BD.

Рассматривая тр-к, видим, что прямоугольные тр-ки AEC и BDC имеют общий острый угол C; следовательно, катет BD больше катета AE; подобным образом, сравнивая тр-ки ABD и ACF, заметим, что катет FC больше катета BD. Следовательно, $FC > BD > AE$, т.-е. наименьшей стороне соответствует наибольшая высота: наименьшая высота AE, соответствующая наибольшей стороне BC, равна 36 *дм*.

Определим площадь S тр-ка ABC по сторонам (см. зад. 596): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. В эту формулу вместо полупериметра p подставим $\frac{25+29+36}{2} = 45$ *дм*; получим

$$S = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 360 \text{ дм}^2.$$

Но площадь тр-ка выражается и так: $\frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{36 \cdot AE}{2} = 18AE$;

следовательно, $18AE = 360$, откуда $AE = \frac{360}{18} = 20$ *дм* $= 2$ *м*.

2) Наибольшая высота соответствует наименьшей стороне (см. п. 1), т.-е. стороне 15.

Площадь тр-ка по сторонам равна (зад. 596):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{15+112+113}{2} = 120;$$

$$S = \sqrt{120(120-15)(120-112)(120-113)} = \sqrt{120 \cdot 105 \cdot 8 \cdot 7} = 840.$$

Но площадь может быть выражена и половиной произведения стороны 15 на высоту h, т.-е. $\frac{15 \cdot h}{2} = 840$, откуда $h = 112$.

598. 1) Пусть стороны тр-ка — $26x$, $25x$ и $3x$. По формуле для площади тр-ка по сторонам: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$S = \sqrt{27x(27x-26x)(27x-25x)(27x-3x)} =$$

$$= \sqrt{27x \cdot x \cdot 2x \cdot 24x} = 36x^2.$$ Следовательно, $36x^2 = 9$ *м*^{2}, откуда

$$x = 1/2 \text{ м}.$$

Стороны равны $26x = 13$ *м*, $25x = 12\frac{1}{2}$ *м*, $3x = 1\frac{1}{2}$ *м*, или 130 *дм*, 125 *дм* и 15 *дм*.

2) Пусть стороны тр-ка—$9x$, $10x$ и $17x$. По формуле для площади тр-ка по сторонам: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$S = \sqrt{18x(18x-9x)(18x-10x)(18x-17x)} =$$

$= \sqrt{18x \cdot 9x \cdot 8x \cdot x} = 36x^2$. Следовательно, $36x^2 = 144$ *см*^{2}, откуда

$$x = 2 \text{ см}.$$

Стороны равны: $9x = 18$ *см*, $10x = 20$ *см*, $17x = 34$ *см*.

599. Рассматриваем 4-угольник $ABCD$, как сумму площадей тр-ков ABC и ACD.

В тр-ке ABC стороны соответственно равны 10 *см*, 21 *см* и 17 *см*. Площадь его по данным сторонам равна:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, при чем $p = \frac{10+21+17}{2} = 24$ *см*.

Подставив в формулу вместо букв числа, получим:

$$S = \sqrt{24(24-10)(24-21)(24-17)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 7} = 84 \text{ см}^2.$$

Подобным образом найдем площадь второго тр-ка ACD со сторонами 8 *см*, 15 *см* и 17 *см*, где $p = \frac{8+15+17}{2} = 20$ *см*.

$$S_1 = \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)} = \sqrt{20 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 3} = 60 \text{ см}^2.$$

Искомая площадь равна $S + S_1 = 84 + 60 = 144$ *см*^{2}.

600. 1-й способ. Площадь тр-ка OAO_1 можно выразить через стороны его: $OA = 39$, $O_1A = 17$ и $OO_1 = 44$; но ту же площадь можно выразить, как половину произведения основания $OO_1 = 44$ на высоту AK (равную половине искомой хорды AB).

В первом случае, по формуле $S = \sqrt{p\ (p-a)(p-b)\ (p-c)}$,

где $p = \frac{17+39+44}{2} = 50$ *см*, находим

$$S = \sqrt{50(50-17)(50-39)(50-44)} = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 11 \cdot 6} = 330 \text{ см}^2;$$

во втором случае $S = \frac{OO_1 \cdot AK}{2} = \frac{44 \cdot AK}{2} = 22\ AK$. Следовательно, $22AK = 330$ *см*^{2}, откуда $AK = 15$ *см*. Искомая хорда $AB = 2AK = 30$ *см*.

2-й способ. Задачу можно решить и не при помощи площадей. Обозначим $OK = x$, $O_1K = 44 - x$; тогда (из прямоугольного тр-ка OAK): $AK^2 = OA^2 - OK^2 = 39^2 - x^2$, и (из прямоугольного тр-ка O_1AK): $AK^2 = O_1A^2 - O_1K^2 = 17^2 - (44-x)^2$; следовательно, $39^2 - x^2 = 17^2 - (44-x)^2$. Решив это ур-ие, находим: $x = 36$ *см*; $AK = \sqrt{39^2 - x^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$ *см*. $AB = 2AK = 30$ *см*.

601. Произвольную точку O внутри параллелограма соединим со всеми вершинами его. Опустим из этой точки высоты на противоположные стороны. Пусть $BC = AD = a$, $AB = CD = b$.

Площадь тр-ка $BOC = \frac{BC \cdot OE}{2} = \frac{a \cdot OE}{2}$; площадь тр-ка $AOD = \frac{AD \cdot OF}{2} = \frac{a \cdot OF}{2}$. Сумма этих тр-ков $BOC + AOD = \frac{a \cdot OE}{2} + \frac{a \cdot OF}{2} = \frac{a(OE + OF)}{2} = \frac{a \cdot EF}{2}$; но EF — высота параллелограма, если считать основанием AD; площадь параллелограма есть $a \cdot EF$. Следовательно, $\frac{a \cdot EF}{2}$ равна половине площади параллелограма. Но тогда и сумма площадей тр-ков $(AOB + COD)$ равна тоже половине площади параллелограма, т.-е. сумма площадей двух противоположных тр-ков равна сумме площадей двух других.

602. Пусть отношение площадей тр-ка ABE и трапеции $EBCD$ равно 2 : 3. Обозначим высоту тр-ка BG, или равную ей высоту трапеции EF, через h, искомый отрезок AE через x. Площадь тр-ка $ABE = \frac{AE \cdot BG}{2} = \frac{xh}{2}$; площадь трапеции $EBCD = \frac{BC + ED}{2} \cdot EF = \frac{AD + (AD - AE)}{2} \cdot EF = \frac{10 + (10 - x)}{2} h = \frac{20 - x}{2} h$. Следовательно, $\frac{xh}{2} : \frac{20 - x}{2} \cdot h = 2 : 3$, или

$$\frac{x}{20 - x} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } x = 8.$$

Примечание. Задачу можно решить также, рассматривая трапецию $BCDE$, как разность параллелограма $ABCD$ и тр-ка ABE.

603. Пусть $AD = 51$ *см*, $BD = 40$ *см*, $AC = 74$ *см*.

В параллелограме диагонали взаимно делятся пополам. Рассматривая один из 2-х равных тр-ков BCD и ABD, видим, что тр-к, напр., ABD делится полудиагональю AE на два равновеликих тр-ка AEB и AED, так как в обоих — основания равны $(EB = ED)$, а высота общая — AK. Следовательно, диагоналями параллелограм делится на 4 равновеликих тр-ка.

Рассмотрим один из этих тр-ков, напр., AED.

$AE = \frac{AC}{2} = \frac{74}{2} = 37$ *см*, $ED = \frac{BD}{2} = \frac{40}{2} = 20$ *см*, $AD = 51$ *см*.

По зад. 596, находим площадь тр-ка AED.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, при чем $p = \frac{37+20+51}{2} = 54$ *см*.

Формула перепишется так: $S = \sqrt{54(54-37)(54-20)(54-51)} = \sqrt{54 \cdot 17 \cdot 34 \cdot 3} = 306$ *см*². Искомая площадь параллелограма $4S = 4 \cdot 306 = 1224$ *см*².

604. Пусть основание тр-ка $AB = a$, $\angle CAB = 30°$, $\angle ABC = 45°$. Опустим высоту CD. Обозначим высоту CD через h; тогда и BD, равная CD (как катеты равнобедренного тр-ка), $= h$. Следовательно,

$$AD = AB - BD = a - h.$$

Рассматривая тр-к ACD, находим (зад. 67), что $AD = \frac{AC}{2}\sqrt{3}$, $CD = \frac{AC}{2}$. Подставив в равенство $AD = \frac{AC}{2}\sqrt{3}$ взамен $\frac{AC}{2} = CD$, получим: $AD = CD\sqrt{3} = h\sqrt{3}$. Сравнивая $AD = h\sqrt{3}$ и $AD = a - h$, имеем: $a - h = h\sqrt{3}$, откуда

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}+1}.$$

Искомая площадь равна $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{ah}{2} = \frac{a \cdot a}{2(\sqrt{3}+1)} =$

$$= \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

605. Пусть $AB = 27$ *см*, $BC = 29$ *см*, $BD = 26$ *см*.

Дополнив тр-к ABC до параллелограма $ABCE$, рассматриваем площадь последнего, как сумму площадей тр-ков ABE и BEC.

В тр-ке ABE сторона $AB = 27$ *см*, $AE = BC = 29$ *см*, $BE = 2\,BD = 2 \cdot 26 = 52$ *см*.

Находим площадь тр-ка по его сторонам, по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\ p = \frac{27+29+52}{2} = 54\ см.$$

$S = \sqrt{54(54-27)(54-29)(54-52)} = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$ *см*².

Но искомый тр-к ABC равен тоже половине параллелограма $ABCE$; следовательно, искомая площадь равна 270 *см*².

606. Пусть $BD > AD$. Обозначим BD через x, тогда $AD = c - x$. По условию, $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AD}$, или $\frac{c}{x} = \frac{x}{c-x}$. Перепишем это ур-ие так: $x^2 + cx - c = 0$. Решив это квадратное ур-ие, найдем:

$c = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4c^2}}{2} = \frac{-c(1 \pm \sqrt{5})}{2}$. Принимаем положительный корень $x = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$; $AD = c - x = c - \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{c(3-\sqrt{5})}{2}$.

Так как перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы, т.-е., $CD^2 = AD \cdot BD$, то

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{\frac{c(\sqrt{5}-1)}{2} \cdot \frac{c(3-\sqrt{5})}{2}} = c\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Искомая площадь тр-ка ABC равна

$$\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{c \cdot c\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} = \frac{c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}.$$

607. 1) Пусть $AB = 17$, $AC = 28$, площадь тр-ка $\| 210$.

Площадь тр-ка ABC равна $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Высоту BD определим из прямоугольного тр-ка ABD, в котором катет AD обозначим через x: $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{17^2 - x^2} = \sqrt{289 - x^2}$. С другой стороны, BD можно определить так: площадь тр-ка $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$,

$2S = AC \cdot BD$, откуда $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 210}{28} = 15$. Отсюда $\sqrt{289 - x^2} = 15$. Возведя обе части в квадрат, получим $289 - x^2 = 225$, откуда $x^2 = 64$; $x = 8$.

Искомая сторона BC определится из прямоугольного тр-ка BCD, у которого $BD = 15$, $DC = AC - AD = 28 - 8 = 20$.

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Если тр-к имеет вид AB_1C, то площадь его равна $\frac{AC \cdot B_1D_1}{2}$. Прямоугольные тр-ки ABD и AB_1D_1 равны, так как гипотенузы $AB = AB_1 = 17$, а катет $BD = B_1D_1 = 15$, ибо площадь тр-ка ABC равна площади AB_1C, а при общности основания (AC) площади тр-ков равны только тогда, когда и высоты (BD и B_1D_1) равны. Следовательно, и $AD_1 = AD = x = 8$. Искомая сторона B_1C определится, как гипотенуза, из прямоугольного тр-ка D_1B_1C, в котором $B_1D_1 = 15$, а $D_1C = AD_1 + AC = 8 + 28 = 36$:

$$B_1C = \sqrt{B_1D_1^2 + D_1C^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{1521} = 39.$$

2) Как и в п. 1. Пусть $AB = 7$, $AC = 11$, $S = \sqrt{1440}$.

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{7^2 - x^2} = \sqrt{49 - x^2},$$

$S = \frac{AC \cdot BD}{2}$, откуда $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2\sqrt{1440}}{11} = \sqrt{49 - x^2}$.

Возведем обе части ур-ия в квадрат: $\frac{4 \cdot 1440}{11^2} = 49 - x^2$.

После преобразований получим: $x^2 = \frac{169}{121}$; $x = \frac{13}{11}$.

В прямоугольном тр-ке BDC катет $DC = AC - AD = 11 - \frac{13}{11} = \frac{108}{11}$, катет $BD = \frac{2\sqrt{1440}}{11}$; искомая сторона BC определится, как гипотенуза тр-ка BDC:

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1440}{11^2} + \frac{108^2}{11^2}} = \sqrt{\frac{17424}{11^2}} = \frac{132}{11} = 12.$$

В случае, если тр-к имеет вид AB_1C, искомая сторона B_1C определится из прямоугольного тр-ка B_1D_1C, где $B_1D_1 = BD = \frac{2\sqrt{1440}}{11}$, $D_1C = AC + AD_1 = AC + AD = 11 + \frac{13}{11} = \frac{134}{11}$; именно

$$B_1C = \sqrt{B_1D_1^2 + D_1C^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1440}{11^2} + \frac{134^2}{11^2}} = \sqrt{\frac{23716}{11^2}} = \frac{154}{11} = 14.$$

3) Как в п. 1. Пусть $AB = 16$, $AC = 63$, $S = 504$.

$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{16^2 - x^2} = \sqrt{256 - x^2}$. $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$, откуда $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 504}{63} = 16$, т.-е. $\sqrt{256 - x^2} = 16$. Возведем обе части ур-ия в квадрат: $256 - x^2 = 16^2$, откуда $x = 0$. Это значит, что AB совпадает с высотой BD, т.-е. тр-к ABC — прямоугольный, и искомая BC — гипотенуза, а катеты — 16 и 63. Таким образом $BC = \sqrt{16^2 + 63^2} = \sqrt{4225} = 65$.

608. Примечание. Так как тр-ки прямоугольные, то, имея по равному катету $AD = BC$ и общую гипотенузу AB, они равны, и AC всегда равна BD.

Углы BAC и ABD, вследствие равенства тр-ков ABC и ABD, равны, а потому тр-к AEB (площадь которого надо определить) равнобедренный, и $AE = EB$. Проведем в тр-ке ABE высоту EF.

Последняя определится (вследствие подобия прямоугольных тр-ков ABC и AEF, так как они имеют общий острый угол BAC) из пропорции:

$$\frac{EF}{EC}=\frac{AF}{AC},\ \text{откуда}\ EF=\frac{BC\cdot AF}{AC};$$

но $BC=12$ *см*, $AC=16$ *см*, а $AF=\frac{AB}{2}$, т. к. высота в равнобедренном тр-ке будет и медианой; $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20$ *см*; следовательно, $AF=\frac{AB}{2}=\frac{20}{2}=10$ *см*.

Подставив в формулу EF числовые значения, получим:

$$EF=\frac{BC\cdot AF}{AC}=\frac{12\cdot 10}{16}=\frac{15}{2}\ \text{см}.$$

Искомая площадь тр-ка ABE равна $\frac{AB\cdot EF}{2}=\frac{20\cdot 15}{2\cdot 2}=75$ *см*^{2}.

609. Пусть в тр-ке BD — высота, BE — биссектриса. Надо найти площадь прямоугольного тр-ка BDE (заштриховано), равную $\frac{BD\cdot DE}{2}$.

Высоту BD найдем из сравнения выражений для площади ABC, найденной по сторонам (формула $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$) и по основанию и высоте.

По формуле $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{26+30+28}{2}=42$, имеем:

$$S=\sqrt{42(42-26)(42-30)(42-28)}=$$
$$=\sqrt{42\cdot 16\cdot 12\cdot 14}=336.$$

С другой стороны, $S=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{28\cdot BD}{2}=14\,BD$; следовательно, $14\,BD=336$, откуда $BD=24$.

Из теоремы о биссектрисе имеем: $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}$.

Пусть $AE=x$, тогда $EC=AC-AE=28-x$. Пропорция перепишется так: $\frac{x}{28-x}=\frac{26}{30}$ и преобразуется: $56x=26\cdot 28$, откуда $x=13$.

Отрезок $DE=AE-AD$, где $AE=x=13$, а $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{26^2-24^2}=10$ (из прямоугольного тр-ка ABD). Следовательно, $DE=AE-AD=13-10=3$.

Искомая площадь тр-ка $BDE=\frac{BD\cdot DE}{2}=\frac{24\cdot 3}{2}=36$ кв. ед.

610. Искомая площадь 6-угольника, как видно из чертежа, состоит из равностороннего тр-ка ABC, со стороной a, 3-х квадратов со стороной a и 3-х равных равнобедренных тр-ков, у которых равные боковые стороны a и угол между ними 120° (ибо угол ECD равен $4d$ без суммы d, d и $\angle ACB$, равный 60°, т.-е. $\angle ECD = 4d - 2d - {}^2/_3 d = 1{}^1/_3 d = 120°$).

Площадь тр-ка $ABC = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (зад. 587, п. 1).

Сумма площадей 3-х квадратов равна $3a^2$.

Площадь равнобедренного тр-ка ECD равна $\frac{ED \cdot CF}{2}$. В прямоугольном тр-ке ECF гипотенуза $EC = a$, а EF и CF найдем по зад. 67, ибо $\angle ECF = \frac{120°}{2} = 60°$ (в равнобедренном тр-ке высота делит пополам угол при вершине и основание); следовательно, $CF = \frac{a}{2}$, $EF = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Площадь тр-ка $ECD = \frac{ED \cdot CF}{2} = \frac{ED}{2} \cdot CF =$ $= EF \cdot CF = \frac{a}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Сумма же площадей 3-х тр-ков равна $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Итак, искомая площадь равна: $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3a^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} =$

$$= a^2(3 + \sqrt{3}).$$

611. Пусть сторона образовавшегося правильного 8-угольника $a_8 = x$.

Тр-к BEF равнобедренный, ибо углы NEF и EFG равны; следовательно, равны и смежные углы FEB и BFE, а потому равны между собой и BE и BF.

Из прямоугольного тр-ка BEF определим $BE = BF = \frac{x\sqrt{2}}{2}$,

$BC = BF + FG + GC = \frac{x\sqrt{2}}{2} + x + \frac{x\sqrt{2}}{2} = a$, откуда $x = \frac{a}{\sqrt{2}+1}$.

Площадь правильного n-угольника равна половине произведения периметра на апофему, т.-е. $\frac{na_nk_n}{2}$; по зад. 533, $k_8 = \frac{a_8}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{a}{2}$; следовательно, искомая площадь

$$S = \frac{8a_8k_8}{2} = 4a_8k_8 = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a^2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

$$= 2a^2(\sqrt{2}-1).$$

612. Пусть в тр-ке AEC стороны $AB = 13$ *см*, $EC = 14$ *см*, $AC = 15$ *см*. Проведем радиусы OK и OL в точки касания ($AB \perp OK$ и $AC \perp OL$, как радиусы, проведенные в точки касания) и соединим точки O и A прямой OA. Треугольник ABC равен сумме тр-ков AOB и AOC. Обозначим радиус через r. Площадь тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OK}{2} = \frac{13r}{2}$; площадь тр-ка $AOC = \frac{AC \cdot OL}{2} = \frac{15r}{2}$. Итак, площадь тр-ка ABC равна сумме площадей AOB и AOC, т.-е. $S = \frac{13r}{2} + \frac{15r}{2} = 14r$ *см*^{2}.

По сторонам площадь тр-ка ABC выразится по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$ *см*. Следовательно, $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ *см*^{2}.

Следовательно, $14r = 84$ *см*^{2}, откуда $r = 6$ *см*.

613. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$, радиус вписанного круга — r. Пусть площади тр-ков AOB, BOC и AOC равны соответственно 28 *м*^{2}, 60 *м*^{2} и 80 *м*^{2}.

Площадь тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OD}{2} = \frac{xr}{2} = 28$ *м*^{2}, площадь тр-ка $BOC = \frac{BC \cdot OE}{2} = \frac{yr}{2} = 60$ *м*^{2}, площадь тр-ка $AOC = \frac{AC \cdot OF}{2} = \frac{zr}{2} = 80$ *м*^{2}.

Из этих ур-ий определяем стороны тр-ка ABC через r, именно $x = \frac{56}{r}$, $y = \frac{120}{r}$, $z = \frac{160}{r}$.

Площадь тр-ка ABC равна сумме площадей тр-ков AOB, BOC и AOC, т.-е. $S = 28 + 60 + 80 = 168$ *м*^{2}.

В формулу $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ подставим вместо S, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ соответственные числовые значения: $S = 168$, $p = \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{1}{2}\left(\frac{56}{r} + \frac{120}{r} + \frac{160}{r}\right) = \frac{168}{r}$, $p - a = \frac{168}{r} - \frac{56}{r} = \frac{112}{r}$, $p - b = \frac{168}{r} - \frac{120}{r} = \frac{48}{r}$, $p - c = \frac{168}{r} - \frac{160}{r} = \frac{8}{r}$.

Следовательно, $168 = \sqrt{\frac{168}{r} \cdot \frac{112}{r} \cdot \frac{48}{r} \cdot \frac{8}{r}} = \frac{2688}{r^2}$, откуда $r^2 = \frac{2688}{168} = 16$ *м* и $r = 4$ *м*.

Искомые стороны равны: $x = \frac{56}{r} = \frac{56}{4} = 14$ *м*, $y = \frac{120}{r} = \frac{120}{4} = 30$ *м*, $y = \frac{160}{r} = \frac{160}{4} = 40$ *м*.

614. Сторона ромба определится, как гипотенуза, из прямоугольного тр-ка AOD, у которого катеты AO и OD суть половины диагоналей, т. е. $\frac{150}{2} = 75$ *см* и $\frac{200}{2} = 100$ *см*.

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{75^2 + 100^2} = \sqrt{15625} = 125 \text{ см}.$$

Площадь ромба равна $AD \cdot BF = 125 \cdot BF$, либо $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{150 \cdot 200}{2} = 15000$ *см*^{2} (зад. 594). Следовательно, $125 \cdot BF = 15000$ *см*^{2}, откуда $BF = 120$ *см*.

Отрезок FD (из прямоугольного тр-ка BFD) $= \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{150^2 - 120^2} = 90$ *см*. Прямоугольные тр-ки BDF и BDE равны, т. к. гипотенуза BD общая, а $BF = BE$, поэтому и $FD = DE$; значит, FE параллельна AC (ибо отрезает от сторон угла ADC равные части), и можем написать $\frac{FE}{AC} = \frac{FD}{AD}$, или $\frac{FE}{200} = \frac{90}{125}$, откуда $FE = 144$ *см*. Площадь равнобедренного тр-ка BFE равна $\frac{FE \cdot BK}{2}$; высота $BK = \sqrt{BF^2 - FK^2} = \sqrt{BF^2 - \left(\frac{FE}{2}\right)^2} = \sqrt{120^2 - \left(\frac{144}{2}\right)^2} = \sqrt{120^2 - 72^2} = 96$ *см*.

Итак, искомая площадь $\frac{FE \cdot BK}{2} = \frac{144 \cdot 96}{2} = 6912$ *см*^{2}.

Примечание. Ответ в учебнике ошибочный, ибо площадь всего ромба $150 \cdot 200 = 15000$ *см*^{2} или 1,5 *м*^{2} (1 *м*^{2} $= 100^2$ *см*^{2} $= 10000$ *см*^{2}).

615. Искомая площадь $ABMCD$ равна сумме площадей тр-ков ABM и CDM.

Площадь тр-ка $ABM = \frac{AB \cdot KM}{2}$,

площадь тр-ка $CDM = \frac{CD \cdot LM}{2}$.

Тр-ки ABM и CDM подобны ($\angle BAD = \angle ADC, \angle ABC = \angle BCD$), а потому высоты KM и LM пропорциональны сходственным сто-

ронам, т.-е. $\frac{KM}{LM}=\frac{AB}{CD}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Так как прямая $KL=10$ *см*, то, обозначив $KM=2x$, $LM=3x$, имеем: $KL=KM+LM$, или $10\ см=2x+3x$, откуда $x=2\ см$; $KM=2x=4\ см$, $LM=3x=6\ см$.

Искомая площадь $ABMCD$ равна сумме площадей ABM и CDM, т.-е. $\frac{AB\,.\,KM}{2}+\frac{CD\,.\,LM}{2}=\frac{8\,.\,4}{2}+\frac{12\,.\,6}{2}=16+36=52\ см^2$.

616. Площадь 4-угольника $ABCD$ состоит из 2-х тр-ков ABC и ACD, стороны которых даны. Площадь тр-ка ABC равна $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c соответственно равны 26 *см*, 30 *см* и 28 *см*, $p=\frac{26+30+28}{2}=42\ см$.

$S_1=\sqrt{42(42-26)(42-30)(42-28)}=\sqrt{42\,.\,16\,.\,12\,.\,14}=336\ см^2$. Подобным же образом площадь тр-ка ADC, со сторонами 25 *см*, 17 *см* и 28 *см*, равна $S_2=\sqrt{35(35-25)(35-17)(35-28)}=\sqrt{35\,.\,10\,.\,18\,.\,7}=210\ см^2$. Площадь 4-угольника $ABCD=336+210=546\ см^2$.

Чтобы найти диагональ BD, проводим прямые BE и DF, перпендикулярные к AC, и DE параллельную AC. Из полученного прямоугольного тр-ка BDE искомая BD определится, как гипотенуза; предварительно находим катет $BE=BH+EH=BH+DF$ и катет $ED=HF=AC-AH-FC$.

Площадь тр-ка ABC равна $S_1=\frac{AC\,.\,BH}{2}=\frac{28\,.\,BH}{2}=14\,.\,BH$, или $S_1=14\,.\,BH=336\ см$, откуда $BH=24\ см$;

отрезок $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{26^2-24^2}=10\ см$.

Площадь тр-ка ADC равна $S_2=\frac{AC\,.\,DF}{2}=\frac{28\,.\,DF}{2}=14\,.\,DF$, или $S_2=14\,.\,DF=210\ см^2$, откуда $DF=15\ см$;

отрезок $CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8\ см$.

Значит, $BE=BH+EH=BH+DF=24+15=39\ см$; $ED=HF=AC-AH-CF=28-10-8=10\ см$.

Искомая диагональ $BD=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{39^2+10^2}=\sqrt{1621}=40{,}2\ldots\ см$.

3. Площадь трапеции.

617. 1) Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Пусть высота h, тогда $256\ см^2=\frac{(35+29)h}{2}$, откуда $h=8\ см$.

2) Площадь трапеции равна произведению средней линии (полусумма оснований) на высоту. Пусть длина средней линии l, тогда $l \cdot 8 = 200$ *см*² (1 *дм*² = 100 *см*²), откуда $l = \frac{200}{8} = 25$ *см*.

3) Пусть основания будут $4x$ и $5x$, тогда площадь трапеции 144 *см*² $= \frac{(4x + 5x)}{2} \cdot 16 = 72x$, откуда $x = 2$ *см*; $4x = 8$ *см*, $5x = 10$ *см*.

618. 1) Пусть $AF = x$, высота $BK = h$.

Площадь трапеции $ABCD = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{28 + 12}{2} \cdot h = 20h$; площадь параллелограма $ABEF = AF \cdot BK = xh$; по условию, площадь параллелограма вдвое меньше площади трапеции $ABCD$, т.-е. $\frac{20h}{xh} = 2$, откуда $x = 10$ *см*.

2) Диагональ AC делит трапецию на 2 тр-ка ABC и ACD, у которых основания те же, что и у трапеции,—BC в тр-ке ABC и AD в тр-ке ACD,—а высота в обоих тр-ках,—AE и CE_1,—есть высота трапеции.

Пусть $BC = a$, $AD = b$, $CE_1 = AE = h$.

Площадь тр-ка $ABC = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{ah}{2}$, площадь тр-ка $ACD = \frac{AD \cdot CE}{2} = \frac{bh}{2}$; отношение площадей (по условию) $\frac{ah}{2} : \frac{bh}{2} = 3 : 7$, откуда $a : b = 3 : 7$.

Пусть $BC = a = 3x$, $AD = b = 7x$,

средняя линия $KL = \frac{a + b}{2} = \frac{3x + 7x}{2} = 5x$.

Площадь трапеции $BCKL$ равна $\frac{BC + KL}{2} \cdot CM$, площадь трапеции $AKLD = \frac{KL + AD}{2} \cdot ME_1$. В обеих трапециях высоты равны, т.-е. CE_1 в точке M делится пополам (KL параллельна AD; следовательно, тр-ки CLN и ACD подобны, а так как CD параллельной прямою NL делится пополам, то в этом же отношении делится и высота CE_1).

Подставив условные обозначения в выражения для площадей, возьмем отношение их:

$$\frac{3x + 5x}{2} \cdot \frac{h}{2} : \frac{5x + 7x}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

619. В равнобедренной трапеции высоты, опущенные из вершин тупых углов, отрезают от большего основания равные отрезки. Так, в равнобедренной трапеции $ABCD$ прямоугольные тр-ки ABE и CFD равны, вследствие равенства гипотенуз AB и CD (трапеция равнобедренная) и катетов BE и CF (расстояние между двумя параллельными прямыми всегда одно и то же); следовательно, $AE = FD$.

Пусть $AE = FD = x$, значит, $AD - BC = AD - EF = 2x$ ($BC = EF$, как отрезки параллельных между параллельными), или $69\ см - 51\ см = 2x$, откуда $x = 9\ см$. Высота $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40\ см$.

Искомая площадь трапеции равна $\frac{BC + AD}{2} \cdot BE =$

$$= \frac{51 + 69}{2} \cdot 40 = 2400\ см^2, \text{ или } 24\ дм^2.$$

620. Отрезок $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{54 - 42}{2} = 6\ см$ (см. зад. 619).

Прямоугольный тр-к ABE равнобедренный, ибо и $\angle ABE = 45°$; следовательно, высота $BE = AE = 6\ см$.

Искомая площадь трапеции равна

$$\frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{54 + 42}{2} \cdot 6 = 288\ см^2.$$

621. Пусть $AD + BC = m$, $AB + CD = n$.

Опустим высоту BE. В прямоугольном тр-ке ABE угол A равен 30°, и, по зад. 67, катет BE равен $\frac{AB}{2}$. Но $BE = CD$; следовательно, $CD = \frac{AB}{2}$. Обозначим CD через x, тогда $AB = 2x$. По условию, $AB + CD = n$ или $2x + x = n$, откуда

$$x = \frac{n}{3}, \text{ т.-е. } CD = BE = \frac{n}{3}.$$

Искомая площадь трапеции равна $\frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{m}{2} \cdot \frac{n}{3} = \frac{mn}{6}$.

622. Пусть $BC = 20\ см$, $AD = 60\ см$, $AB = 13\ см$, $CD = 37\ см$.

Проведем BE параллельно CD. В тр-ке ABE сторона AB, по условию, равна 13 $см$, сторона BE равна параллельной стороне $CD = 37\ см$, третья сторона AE равна разности оснований AD и BC, так как $AE = AD - DE = AD - BC = 60 - 20 = 40\ см$.

Высота BF тр-ка ABC (она же высота трапеции) определится из сравнения 2-х выражений для площади тр-ка ABE.

Площадь тр-ка $ABE = \frac{AE \cdot BF}{2} = \frac{40 \cdot BF}{2} = 20 \cdot BF$ *см*². Определим ту же площадь по сторонам по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c равны 13 *см*, 37 *см* и 40 *см*,

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+37+40}{2} = 45 \text{ см}.$$

Итак, $S = \sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)} = \sqrt{45 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 5} = 240$ *см*². Таким образом, $20 \cdot BF = 240$, откуда $BF = 12$ *см*.

Искомая площадь трапеции равна $\frac{BC+AD}{2} \cdot BF =$

$$= \frac{20+60}{2} \cdot 12 = 480 \text{ см}^2.$$

623. Указание. В равнобедренной трапеции равны между собой: острые углы, тупые углы и диагонали. Это легко доказать, если опустить из вершин тупых углов высоты и сравнить соответственные равные прямоугольные треугольники. Отрезки большего основания тоже равны (зад. 619).

1-й способ. Проведем диагональ BD и высоту BE. Из сравнения выражений для площади тр-ка ABD, у которого стороны соответственно равны $AB = 17$ *м*, $AD = 44$ *м* и $BD = 39$ *м*, определим высоту BE.

Площадь тр-ка $ABD = \frac{AD \cdot BE}{2} = \frac{44 \cdot BE}{2} = 22 \cdot BE$.

По формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c равны 17 *м*, 44 *м* и 39 *м*, $p = \frac{17+44+39}{2} = 50$ *м*, имеем

$$S = \sqrt{50(50-17)(50-44)(50-39)} = \sqrt{50 \cdot 33 \cdot 6 \cdot 11} = 330 \text{ м}^2.$$

Следовательно, $22BE = 330$ *м*², откуда $BE = 15$ *м*. Из прямоугольного тр-ка ABE, у которого гипотенуза $AB = 17$ *м*, а катет $BE = 15$ *м*, найдем: катет $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ *м*.

Меньшее основание $BC = AD - 2AE = 44 - 16 = 28$ *м*.

Искомая площадь равна $\frac{AD+BC}{2} \cdot BE = \frac{44+28}{2} \cdot 15 = 540$ *м*².

2-й способ. Площадь равнобедренной трапеции равна произведению большего отрезка большего основания на высоту, т.-е. $S = ED \cdot BE$. В самом деле. ED равна полусумме оснований. Пусть меньшее основание — a, большее — b, отрезок $AE = FD = c$; тогда $b = a + 2c$; следовательно, выражение $\frac{a+b}{2}$ перепишется так: $\frac{a+a+2c}{2} = a + c$. Как видно из чертежа, $ED = EF + FD = BC + AE = a + c$.

Высота BE находится, как указано выше (1-й способ).

Отрезок $ED = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$ *м*.

Искомая площадь трапеции равна $36 \cdot 15 = 540$ *м*^{2}.

624. 1) Проведя CE параллельно BD, получим равнобедренный прямоугольный тр-к ACE; т. к. CE параллельна BD, а $BD \perp AC$, то CE тоже перпендикулярна к AC; с другой стороны, CE равна BD, следовательно, равна и AC ($AC = BD$ — см. указание к зад. 623).

В равнобедренном прямоугольном тр-ке ACE гипотенуза $AE = AD + DE = AD + BC = 20 + 12 = 32$ *см* ($DE = BC$, как параллельные между параллельными).

Пусть $AC = CE = x$. По Пифагоровой теореме, $AC^2 + CE^2 = AE^2$, или $x^2 + x^2 = 32^2$, откуда $x^2 = \frac{32^2}{2} = 512$ *см*^{2}.

Трапеция $ABCD$ равновелика тр-ку ACE, ибо площадь трапеции $ABCD$ равна площади тр-ка ADC плюс площадь тр-ка ABC, а площадь тр-ка ACE равна той же площади тр-ка ADC плюс площадь тр-ка CDE, равного тр-ку ABC ($AB = CD$, $BC = DE$, $AC = CE$).

Итак, искомая площадь трапеции $ABCD$ равна площади тр-ка ACE, именно: $\frac{AC \cdot CE}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{512}{2} = 256$ *см*^{2}.

2) Как и в п. 1, искомая площадь трапеции равна площади равнобедренного прямоугольного тр-ка ACE, у которого известна высота $CF = h$.

Очевидно, что и прямоугольный тр-к ACF тоже равнобедренный, ибо угол $CAF = 45°$, значит, и $\angle ACF = 45°$; следовательно, $AF = CF = h$.

Искомая площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольного тр-ка $ACE = {}^1/_2\ AE \cdot CF = AF \cdot CF = h^2$ (${}^1/_2 AE = AF$, т. к. высота CF равноб. тр-ка служит и медианой).

625. Из равнобедренного прямоугольного тр-ка ACF ($\angle ACF = \angle CAF = 45°$), у которого гипотенуза $= c$, найдем катеты $CF = AF = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

Искомая площадь трапеции равна (зад. 623, 2-й способ):

$$AF \cdot CF = \frac{c\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{c\sqrt{2}}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

626. Отрезок ED равен $\frac{AD - BC}{2} = \frac{26 - 10}{2} = 8$ *см* (зад. 619), $AE = AD - DE = 26 - 8 = 18$ *см*. В прямоугольном тр-ке ACD высоту CE определим на основании теоремы: „перпендикуляр, опу-

щенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы":

$$CE^2 = AE \cdot ED = 18 \cdot 8;\ \text{откуда}\ CE = 12\ см.$$

Искомая площадь трапеции (зад. 623, 2-й способ) $AE \cdot CE = 18 \cdot 12 = 216\ см^2$.

$$(\text{Или}\ \frac{AD+BC}{2} \cdot CE = \frac{26+10}{2} \cdot 12 = 216\ см^2).$$

627. Пусть $AD = 142\ см$, $BC = 89\ см$, $BD = 120\ см$, $AC = 153\ см$. Проведя $CE \parallel BD$ до пересечения с основанием AD в точке E, получим тр-к ACE, у которого $AC = 153\ см$ (по условию), $CE = BD = 120\ см$, $AE = AD + DE = AD + BC = 142 + 89 = 231\ см$. Высоту CF этого тр-ка (она же и высота трапеции $ABCD$) найдем из сравнения выражений для площади тр-ка ACE.

Площадь тр-ка ACE равна $\frac{AE \cdot CF}{2} = \frac{231 \cdot CF}{2}$.

По формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c соответственно равны 120 *см*, 153 *см* и 231 *см*,

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{120+153+231}{2} = 252\ см,$$

$$S = \sqrt{252(252-120)(252-153)(252-231)} =$$

$$= \sqrt{252 \cdot 132 \cdot 99 \cdot 21} = 8316\ см^2.$$

Следовательно, $8316 = \frac{231 \cdot CF}{2}$, откуда $CF = 72\ см$.

Искомая площадь трапеции равна $\frac{AD+BC}{2} \cdot CF =$

$$= \frac{142+89}{2} \cdot 72 = 8316\ см^2.$$

628. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны очевидно a_3 и a_6, ибо сторона правильного тр-ка стягивает дугу в $\frac{360°}{3} = 120°$, а сторона правильного 6-угольника — дугу в $\frac{360°}{6} = 60°$. Высота же KL трапеции равна $OL - OK = k_6 - k_3$, т.-е. разности апофем 6-угольника и тр-ка.

Основания трапеции $a_3 = r\sqrt{3}$ и $a_6 = r$, высота $KL = k_6 - k_3 = \frac{r}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2}$ или $KL = \frac{r}{2}(\sqrt{3}-1)$ [$k_6 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (зад. 528_2); но $a_6 = r$; следовательно, $k_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; $k_3 = \frac{r}{2}$, т. к. радиус вписанного круга равен половине радиуса описанного].

Искомая площадь трапеции $ABCD$ равна

$$\frac{AD+BC}{2}\cdot KL=\frac{(r\sqrt{3}+r)}{2}\cdot\frac{r}{2}(\sqrt{3}-1)=$$

$$=\frac{r(\sqrt{3}+1)}{2}\cdot\frac{r(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{r^2}{2}.$$

629. В описанном выпуклом 4-угольнике суммы противоположных сторон равны, т. е. $AB+CD=BC+AD$, но $AB=CD=a$ (по условию); следовательно, $BC+AD=2a$.

Высота $BE=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$ (зад. 67).

Искомая площадь трапеции $ABCD$ равна

$$\frac{BC+AD}{2}\cdot BE=\frac{2a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

630. Пусть EF, параллельная основаниям, делит площадь $ABCD$ пополам.

Проведем BN параллельно CD. Тр-ки ABN и EBL подобны (так как $EL\parallel AN$). Из подобия тр-ков следует: $\frac{EL}{AN}=\frac{BK}{BM}$; но $AN=AD-ND=AD-BC=22-6=16$ *см* ($ND=BC$, как отрезки параллельных между параллельными). $BM=8$ *см*. Следовательно, $\frac{EL}{16}=\frac{BK}{8}$, или $\frac{EL}{BK}=\frac{16}{8}=2$. Пусть $EL=2x$, $BK=x$. Площадь трапеции $EBCF=\frac{BC+EF}{2}\cdot BK$. Основание $EF=EL+LF=2x+6$ *см*, ибо $LF=BC$, как отрезки параллельных между параллельными. Следовательно, площадь трапеции

$$EBCF=\frac{BC+EF}{2}\cdot BK=\frac{6+2x+6}{2}\cdot x=\frac{(12+2x)}{2}\cdot x=(6+x)x.$$

С другой стороны, площадь трапеции $EBCF$ равна половине площади $ABCD$, т.-е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+AD}{2}\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot\frac{6+22}{2}\cdot 8=56\ см^2.$$

Итак, $(6+x)x=56$. Перепишем это ур-ие: $x^2+6x-56=0$.

Решив это ур-ие, находим: $x=-3\pm\sqrt{3^2+56}$. Принимаем положительный корень $x=\sqrt{65}-3=5{,}06...$ *см*.

2) Пусть EF, параллельная основаниям, делит площадь трапеции $ABCD$ в отношении $9:8$ ($EBCF$ — большая часть).

Проведем BN параллельно CD. Тр-ки ABN и EBL подобны (так как $EL \parallel AN$).

Из подобия этих тр-ков следует: $\frac{EL}{AN} = \frac{BK}{BM}$; но $AN = AD - ND = AD - BC = 11 - 6 = 5$ *см* ($ND = BC$, как отрезки параллельных между параллельными), $BM = 5$ *см*. Следовательно, $\frac{EL}{5} = \frac{BK}{5}$, т.-е. $EL = BK$, которые обозначим через x.

Площадь трапеции $EBCF = \frac{BC + EF}{2} \cdot BK$. Основание $EF = EL + LF = x + 6$, ибо $LF = BC$, как отрезки параллельных между параллельными. Следовательно, площадь трапеции

$$EBCF = \frac{BC + EF}{2} \cdot BK = \frac{6 + x + 6}{2} \cdot x = \frac{(12 + x)x}{2}.$$

Но площадь трапеции $EBCF$ равна $\frac{9}{17}$ площади трапеции $ABCD$, т.-е. $\frac{9}{17} \cdot \frac{BC + AD}{2} \cdot BM = \frac{9}{17} \cdot \frac{6 + 11}{2} \cdot 5 = \frac{45}{2}$ *см*^{2}. Значит, $\frac{(12 + x)x}{2} = \frac{45}{2}$. Перепишем это ур-ие: $x^2 + 12x - 45 = 0$. Решив это квадратное ур-ие, найдем $x = -6 \pm \sqrt{6^2 + 45} = -6 \pm 9$. Принимаем положительный корень $x = 3$ *см*.

631. Соединяя вершины внешнего многоугольника с вершинами внутреннего, как показано на чертеже, получим ряд трапеций AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D и т. д., бóльшими основаниями которых будут стороны внешнего многоугольника, а меньшими основаниями—стороны меньшего. Площади этих трапеций будут:

$$\frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм, \quad \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм, \quad \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм \text{ и т. д.},$$

где высотой у всех—5 *дм*. Сложив эти площади, получим площадь, заключенную между периметрами многоугольников. Итак, искомая площадь равна:

$$\frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм + \frac{BC + B_1C_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм + \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot 5 \text{ } дм \ldots =$$

$$= \frac{5}{2}[(AB + BC + CD \ldots) + (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 \ldots)]$$

Так как $AB + BC + CD \ldots = 97$ *дм*, а $A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 \ldots = 63$ *дм*, то искомая площадь равна $\frac{5}{2}(97 + 63)$ *дм*$^2 = 400$ *дм*$^2 = 4$ *м*^{2}.

4. Площадь многоугольника.

632. Пусть диагональ $AC = k$ перпендикулярна к диагонали $BD = l$.

Пусть отрезок $BO = x$, тогда $OD = BD - BO = l - x$. Площадь 4-угольника $ABCD$ разобьем на 2 тр-ка ABC и ACD. Площадь тр-ка $ABC = \frac{AC \cdot OB}{2} = \frac{kx}{2}$, площадь тр-ка $ACD = \frac{AC \cdot OD}{2} = \frac{k(l-x)}{2}$. Искомая площадь 4-угольника $ABCD$ равна сумме площадей тр-ков ABC и ACD, т.-е. $\frac{kx}{2} + \frac{k(l-x)}{2} = \frac{kl}{2}$.

2) Разобьем 4-угольник $ABCD$ на 2 тр-ка ABC и ACD. Опустим перпендикуляры BM и DN из вершин B и D на диагональ AC. Пусть $BD = k$, $AC = l$.

Обозначим отрезок $BO = x$, а $DO = k - x$; тогда

$$BM = \frac{BO}{2} = \frac{x}{2} \text{ (зад. 67)}, \quad DN = \frac{DO}{2} = \frac{k-x}{2}.$$

Площадь тр-ка $ABC = \frac{AC \cdot BM}{2}$,

площадь тр-ка $ACD = \frac{AC \cdot DN}{2}$.

Подставив в формулы площадей тр-ков буквенные значения, получим: площадь тр-ка $ABC = \frac{lx}{2.2}$, площадь тр-ка $ACD = \frac{l(k-x)}{2.2}$.

Искомая площадь равна сумме этих площадей:

$$\frac{lx}{4} + \frac{l(k-x)}{4} = \frac{kl}{4}.$$

633. Пусть $AB = a$, $BC = b$; очевидно, и $DC = a$, $AD = b$.

Соединим точки E и G и точки H и F между собой.

Полученная фигура $EFGH$ есть ромб, EG и HF — диагонали его. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, (зад. 594), т.-е. искомая площадь равна $\frac{EG \cdot HF}{2}$.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся пополам следовательно, $EO = OG$ и $HO = OF$. Длина $EO = EM + MO$; но EM — высота равностороннего тр-ка со стороной a, следовательно, она равна $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; $OM = BQ = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$. Значит,

$$EO = EM + MO = \frac{a}{2}\sqrt{3} + \frac{b}{2}, \text{ а } EG = 2EO = a\sqrt{3} + b.$$

Длина $HO = HP + PO$; но HP — высота равностороннего тр-ка со стороной b, следовательно, она равна $\frac{b}{2}\sqrt{3}$; $PO = AM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. Значит, $HO = HP + PO = \frac{b}{2}\sqrt{3} + \frac{a}{2}$,

$$HF = 2HO = b\sqrt{3} + a.$$

Итак, искомая площадь ромба равна

$$\frac{EG \cdot HF}{2} = \frac{1}{2}(a\sqrt{3} + b)(b\sqrt{3} + a).$$

634. Четыреугольник $ABDE$ состоит из 3 тр-ков: BCD и равносторонних ABC и CDE.

Площади равносторонних тр-ков ABC и CDE равны $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ и $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$ (зад. 587_1).

В тр-ке BCD угол $BCD = 60°$, так как углы ACB и DCE, как углы равносторонних тр-ков, содержат по $60°$, а сумма углов, расположенных по одну сторону прямой и имеющих общую вершину, равна $2d$. Сторона $BC = a$, $CD = b$ (ибо $BC = AC$, $CD = CE$).

Опустим высоту BF на сторону CD. По зад. 67,

$$BF = \frac{BC}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Площадь тр-ка $BCD = \frac{CD \cdot BF}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{ab}{4}\sqrt{3}$.

Искомая площадь 4-угольника $ABDE =$

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2}{4}\sqrt{3} + \frac{ab}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + ab + b^2).$$

635. Опустим перпендикуляры BE и CF на сторону AD.

Разобьем 4-угольник $ABCD$ на трапецию $EBCF$ и 2 прямоугольных тр-ка ABE и CDF.

Площадь трапеции равна $\frac{BE + CF}{2} \cdot EF$; площадь прямоугольного тр-ка $ABE = \frac{AE \cdot BE}{2}$, а тр-ка $CDF = \frac{FD \cdot CF}{2}$.

Итак, надо определить прямые BE, CF, EF, AE и FD, чтобы получить площади указанных трех фигур.

BE и CF определятся, как перпендикуляры, опущенные из вершины прямого угла на гипотенузу.

В тр-ке ABM катет $BM = \sqrt{AM^2 - AB^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ *см*.

Площадь тр-ка ABM равна $\frac{AB \cdot BM}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150$ *см*^{2},

или $\frac{AM \cdot BE}{2} = \frac{25}{2} BE$; значит, $150 = \frac{25}{2} BE$, откуда $BE = 12$ *см*.

В тр-ке MCD катет $MC = \sqrt{MD^2 - CD^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ *см*.

Площадь тр-ка $MCD = \frac{MC \cdot CD}{2} = \frac{24 \cdot 7}{2} = 84$ *см*^{2}, или

$\frac{MD \cdot CF}{2} = \frac{25}{2} \cdot CF$; значит, $84 = \frac{25}{2} \cdot CF$, откуда $CF = 6{,}72$ *см*.

Длина $EF = EM + MF$; из прямоугольного тр-ка BEM определяем катет $EM = \sqrt{BM^2 - BE} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ *см*; из прямоугольного тр-ка MCF определяем катет $MF = \sqrt{MC^2 - CF^2} = \sqrt{2{,}^2 - 6{,}72^2} = 23{,}04$ *см*. Следовательно, $EF = EM + MF = 16 + 23{,}04 = 39{,}04$ *см*. Отрезок $AE = AM - EM = 25 - 16 = 9$; отрезок $FD = MD - MF = 25 - 23{,}04 = 1{,}96$ *см*.

Итак, площадь трапеции $= \frac{BE + CF}{2} \cdot EF = \frac{12 + 6{,}72}{2} \cdot 39{,}04$;

площадь тр-ка ABE равна $\frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2}$; площадь тр-ка CDF

равна $\frac{1{,}96 \cdot 6{,}72}{2}$.

Сумма $\frac{12 + 6{,}72}{2} \cdot 39{,}04 + \frac{9 \cdot 12}{2} + \frac{1{,}96 \cdot 6{,}72}{2} = 426$ *см*^{2}. Это и есть величина искомой площади 4-угольника $ABCD$.

636. Дуга $EA = 360° - (30° + 60° + 90° + 120°) = 60°$.

Соединим центр O с вершинами A, B, C, D и E.

Искомая площадь равна сумме площадей 5-ти тр-ков: OAB, OBC, OCD, ODE и OEA.

Тр-ки OEA и OBC суть равносторонние тр-ки со стороной—r; площадь каждого из них равна $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$ (зад. 587_1), а сумма обоих равна $\frac{r^2}{2}\sqrt{3}$.

Площадь тр-ка COD, у которого $\angle COD = 90°$, равна половине произведения катетов: $\frac{r^2}{2}$.

В тр-ке ODE, у которого $\angle EOD = 120°$, сторона ED равна стороне правильного тр-ка $r\sqrt{3}$, а высота OK—апофема, равная $\frac{r}{2}$

Площадь этого тр-ка $\frac{ED \cdot OK}{2} = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Площадь тр-ка AOB равна $\frac{AB \cdot OL}{2}$; но $AB = a_{12}$ ($\angle AOB = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$) (зад. 530), $OL = k_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (зад. 531); следовательно,

площадь тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OL}{2} = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{r^2}{4}$.

Итак, сумма площадей всех пяти тр-ков равна:

$$\frac{r^2}{2}\sqrt{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4}(3+3\sqrt{3}) = \frac{3}{4}r^2(\sqrt{3}+1).$$

637. 1) Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус.

Для доказательства, соединим центр с вершинами многоугольника; многоугольник разобьется на ряд тр-ков AOB, BOC, COD и т. д.; площадь каждого из них равна половине произведения основания на высоту, но основанием служит сторона многоугольника, а высотой—радиус (как видно из чертежа, площадь, напр., тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OL}{2} = \frac{AB \cdot r}{2}$).

Итак, площадь многоугольника $ABCD\ldots$ равна сумме площадей тр-ков: $AOB = \frac{AB \cdot r}{2}$, $BOC = \frac{BC \cdot r}{2}$, $COD = \frac{CD \cdot r}{2}$ и т. д., т.-е.

$$240\ см^2 = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CD \cdot r}{2} \ldots = \frac{r}{2}(AB + BC + CD\ldots) =$$

$$= \frac{r}{2} \cdot 60;\ \text{отсюда}\ r = 8\ см.$$

2) Пусть периметр многоугольника P. Тогда (см. п. 1) $\frac{P \cdot 25}{2} = 2000\ см^2$ ($1\ дм^2 = 100\ см^2$), откуда $P = 160\ см = 16\ дм$.

638. Радиус R описанной окружности вдвое больше радиуса r вписанной, т.-е. равен $2r$. Сторона a_3 правильного вписанного тр-ка равна $R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$. Площадь правильного тр-ка равна $\frac{a_3^2}{4}\sqrt{3} = (2r\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 3r^2\sqrt{3}$.

639. Пусть из произвольной точки O внутри правильного многоугольника $ABCD\ldots$ опущены перпендикуляры $OK, OL, OM\ldots$ Соединив точку O с вершинами многоугольника, получим ряд тр-ков AOB, BOC, $COD\ldots$, и сумма площадей их равна площади многоугольника.

Пусть сторона многоугольника $ABCD = a$ (по условию, многоугольник правильный). Площадь тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OK}{2} = \frac{a \cdot OK}{2}$, площадь тр-ка $BOC = \frac{BC \cdot OL}{2} = \frac{a \cdot OL}{2}$, площадь тр-ка $COD = \frac{CD \cdot OM}{2} = \frac{a \cdot OM}{2}$ и т. д. Сложив эти площади и заметив, что площадь многоугольника равна $\frac{nak}{2}$, где n — число сторон многоугольника, а k его апофема, получим:

$$\frac{nak}{2} = \frac{a \cdot OK}{2} + \frac{a \cdot OL}{2} + \frac{a \cdot OM}{2} \ldots = \frac{a}{2}(OK + OL + OM\ldots),$$

откуда $\frac{OK + OL + OM\ldots}{n} = k$, что и требовалось доказать.

640. 1) Сторона правильного вписанного 6-угольника a_6 равна r, апофема его $k_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (как высота правильного тр-ка со стороной r). Площадь многоугольника — $\frac{nak}{2}$; следовательно, искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$.

2) Апофема описанного многоугольника есть радиус круга, около которого и описан многоугольник.

Пусть сторона данного 6-угольника — a, тогда радиус его R тоже равен a, а апофема $\frac{R}{2}\sqrt{3}$ или $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, которая равна данному радиусу r, т.-е. $\frac{a}{2}\sqrt{3} = r$, откуда $a = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$. Площадь правильного 6-угольника равна

$$\frac{6a_6k_6}{2} = 3a_6 \cdot \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{3a_6^2\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} r\sqrt{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3}.$$

3) Апофема правильного 6-угольника равна $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (как высота правильного тр-ка со стороной a). Следовательно, искомая площадь $S=\frac{nak}{2}$ перепишется так: $S=\frac{6a}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, откуда $a=\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}=\frac{1}{3}\sqrt{2S\sqrt{3}}$.

641. 1) Соединив центр O с вершинами A и B, получаем тр-к AOB с $\angle AOB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$. Опустим перпендикуляр AK на сторону AB; получается равнобедренный прямоугольный тр-к AOK ($\angle AKO=90^\circ-45^\circ=45^\circ$), и $AK=OK=\frac{OA}{2}\sqrt{2}=\frac{r}{2}\sqrt{2}$.

Площадь тр-ка $AOB=\frac{OB\cdot AK}{2}=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{2}=\frac{r^2}{4}\sqrt{2}$.

Искомая площадь правильного 8-угольника равна сумме площадей 8 тр-ков, каждый из которых равен тр-ку AOB, т.-е. эта площадь равна $8\cdot\frac{r^2}{4}\sqrt{2}=2r^2\sqrt{2}$.

Пусть AB — сторона правильного вписанного 12-угольника. Угол $AOB=\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$. Опустив высоту AC на сторону AB, получаем прямоугольный тр-к AOC с углом $AOC=30^\circ$; катет $AC=\frac{AO}{2}=\frac{r}{2}$ (зад. 67). Площадь тр-ка $AOB=\frac{OB\cdot AC}{2}=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}=\frac{r^2}{4}$.

Площадь правильного 12-угольника равна сумме площадей 12 тр-ков, каждый из которых равен тр-ку AOB, т.-е. искомая площадь равна $12\cdot\frac{r^2}{4}=3r^2$.

2) Площадь правильного 8-угольника определим по формуле $S_n=\frac{nak}{2}$, или $S_8=\frac{8a_8k_8}{2}$. Апофема $k_8=\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)$ (зад. 533).

Итак, площадь $S_8=\frac{8a}{2}\cdot\frac{a}{2}(\sqrt{2}+1)=2a^2(\sqrt{2}+1)$.

Площадь правильного 12-угольника

$$S_{12}=\frac{12}{2}a_{12}\cdot k_{12}=6a\cdot\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})=3a^2(2+\sqrt{3})$$

[выражение $k_{12}=\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$ см. зад. 533].

642. 1) Соединив центр O с точками K, L, M..., получим 12 равных равносторонних тр-ков, сторона каждого из которых равна $\frac{AC}{3}=\frac{r\sqrt{3}}{3}$ ($AC=a_3=r\sqrt{3}$ —см. зад. 550_1). Площадь равностороннего тр-ка со стороной x равна $\frac{x^2}{4}\sqrt{3}$ (зад. 587_1); следовательно, площадь тр-ка,

напр., $BKL=\frac{1}{4}\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{r^2}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{12}r^2\sqrt{3}$.

Искомая площадь равна сумме площадей 12 тр-ков, равных тр-ку KBL, именно $12\cdot{}^1/_{12}\,r^2\sqrt{3}=r^2\sqrt{3}$.

Примечание. Тр-ки $BKL=CLM=DMN$... (зад. 550_1). Тр-к BKL равен тр-ку OKL: у обоих сторона KL общая, а $\angle KOL=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$; следовательно, в равнобедренном тр-ке OKL углы OKL и OLK равны по 60°, т.-е. и этот тр-к равносторонний, с одинаковой стороной, что и у тр-ка BKL.

2) Искомая площадь состоит из площади квадрата $ABCD$, сторона которого равна $r\sqrt{2}$, и 4-х прямоугольных равнобедренных тр-ков KA_1B_1, LC_1D_1, MB_1F_1 и NHI, катеты которых равны (зад. 550_2) по $r(\sqrt{2}-1)$.

Площадь квадрата $ABCD$ равна $(r\sqrt{2})^2=2r^2$; площадь одного из 4-х равных прямоугольных равнобедренных тр-ков —

$$\frac{r(\sqrt{2}-1)\cdot r(\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{r^2(\sqrt{2}-1)^2}{2}.$$

Искомая площадь звезды равна $2r^2+4\cdot\frac{r^2(\sqrt{2}-1)^2}{2}=4r^2(2-\sqrt{2})$.

643. 1) Пусть радиус данной окружности — r. По зад. 641_1, площадь правильного вписанного 12-угольника равна $3r^2$, т.-е. $Q=3r^2$, откуда $r^2=\frac{Q}{3}$.

Площадь правильного вписанного 6-угольника по радиусу r равна $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ (зад. 640_1); подставляя значение r^2, получим:

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{Q\sqrt{3}}{2}.$$

2) Пусть радиус данной окружности — r. По зад. 641_1, площадь правильного вписанного 8-угольника равна $2r^2\sqrt{2}$, т.-е $Q = 2r^2\sqrt{2}$, откуда $r^2 = \frac{Q}{2\sqrt{2}}$. Площадь квадрата равна $(a_4)^2$, т.-е. $(r\sqrt{2})^2 = 2r^2 = 2 \cdot \frac{Q}{2\sqrt{2}} = \frac{Q\sqrt{2}}{2}$.

Примечание. Мы определяем сразу r^2, так как площади есть величины 2-го порядка и в результате, выражая все величины через r, мы непременно получим формулу, выраженную через r^2. Это освобождает нас от нескольких излишних действий.

644. Площадь правильного 8-угольника, по формуле $\frac{na_nk_n}{2}$, равна $\frac{8a_8k_8}{2} = 4a_8k_8$. В данном случае, апофема $k_8 = r$ (как наглядно видно по чертежу). Величина же a_8 определится из равенства (зад. 533): $k_8 = \frac{a_8}{2}(\sqrt{2}+1)$, откуда $a_8 = \frac{2k_8}{\sqrt{2}+1} =$

$= \frac{2k_8(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2k_8(\sqrt{2}-1) = 2r(\sqrt{2}-1)$, так как $k_8 = r$ (в данном случае). Следовательно, искомая площадь

$$4a_8k_8 = 4 \cdot 2r(\sqrt{2}-1) \cdot r = 8r^2(\sqrt{2}-1).$$

Площадь правильного 12-угольника, по формуле $\frac{na_nk_n}{2}$, равна $\frac{12a_{12}k_{12}}{2} = 6a_{12}k_{12}$. В данном случае, апофема $k_{12} = r$. Величина же a_{12} определится из равенства (зад. 533): $k_{12} = \frac{a_{12}}{2}(2+\sqrt{3})$, откуда $a_{12} = \frac{2k_{12}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2k_{12}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2k_{12}(2-\sqrt{3}) =$

$= 2r(2-\sqrt{3})$, так как $k_{12} = r$ (в данном случае).

Итак, искомая площадь $6a_{12}k_{12} = 6 \cdot 2r(2-\sqrt{3}) \cdot r = 12r^2(2-\sqrt{3})$.

645. 1) Сторона правильного 10-угольника равна $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, апофема $k_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (зад. 531_3). Площадь правильного 10-угольника, по формуле $\frac{na_nk_n}{2}$, равна

$$5a_{10}k_{10}=5\cdot\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{5r^2}{8}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2\cdot\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}=\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

2) По зад. 533_5, $k_{10}=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$; следовательно, формула $S=\frac{na_nk_n}{2}=5a_{10}k_{10}$ перепишется так: $\frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

646. 1) Опустим высоту BC на радиус OA; катет $OC=\frac{1}{2}a_{10}$ а $BC=k_{10}$. В самом деле. $\angle BOA=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$, а потому в прямоугольном тр-ке BOC, в котором $\angle BOC=72^\circ$, угол $OBC=18^\circ$.

Построив сторону правильного 10-угольника DE и проведя апофему OK, видим, что в прямоугольном тр-ке DOK гипотенуза OD равна радиусу, а острый угол $DOK=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{10}=18^\circ$; следовательно, прямоугольные тр-ки BOC и DOK, имеющие равные гипотенузы $OB=OD=r$ и равные углы $OBC=DOK=18^\circ$, равны между собой, и $OC=DK=\frac{a_{10}}{2}$;

$$BC=OK=k_{10}=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ \text{(зад. }534_5\text{)}.$$

Площадь тр-ка $AOB=\frac{OA\cdot BC}{2}=\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=$

$=\frac{r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, а площадь 5-угольника в 5 раз больше площади тр-ка, т.-е. равна $\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Апофема $k_5=\sqrt{r^2-\frac{a_5^2}{4}}$. Из равенства $a_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (зад. 538) определим $r=\frac{2a_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ и подставим в формулу для k_5;

получим: $k_5 = \sqrt{\frac{4a_5^2}{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{a_5^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2(10 + 2\sqrt{5})}{80} - \frac{a^2}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2(5 + 2\sqrt{5})}{20}} = \sqrt{\frac{a^2 . 5(5 + 2\sqrt{5})}{20 . 5}} = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

Площадь правильного 5-угольника равна (по формуле $\frac{na_nk_n}{2}$)

$\frac{5a_5k_5}{2} = \frac{5 . a}{2} \cdot \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

647. Пусть AB сторона правильного вписанного 24-угольника. Опустим высоту BC на радиус OA. Угол AOB при центре O равен $\frac{360°}{24} = 15°$. Продолжив BC до пересечения с окружностью, получим хорду BD, стягивающую дугу в 30°, т.-е. $BD = a_{12}$, а $BC = {}^1/_2 BD = {}^1/_2 a_{12} = {}^1/_2 . r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (зад. 530$_2$).

Площадь тр-ка $AOB = \frac{OA . BC}{2} = {}^1/_2 . r . {}^1/_2 r\sqrt{2 - \sqrt{3}} =$

$= {}^1/_4 r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, а площадь 24-угольника равна сумме площадей 24 таких тр-ков, т.-е. равна $24 . {}^1/_4 . r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 6r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, или $3r^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (см. прим. к зад. 530).

5. Сравнение площадей треугольников и многоугольников.

648. Пусть диагональ BD делит пополам диагональ AC, так что $AO = OC$.

Опустим из точек A и C высоты AE и CE_1 на диагональ BD. Прямоугольные тр-ки AOE и COE равны, ибо они имеют равные острые углы $AOE = COE_1$, как вертикальные, а гипотенузы AO и OC равны по условию; следовательно, и катеты AE и CE_1 равны между собою. Площадь тр-ка $ABD = \frac{BD . AE}{2}$, а площадь тр-ка $BCD = \frac{BD . CE_1}{2}$; но, вследствие равенства, AE и CE_1 и площади тр-ков ABD и BCD равны между собою, т.-е. диагональ BD делит площадь 4-угольника $ABCD$ пополам.

649. Так как $BK = KC$ и $AL = LD$, то трапеции $ABKL$ и $KCDL$ имеют равные основания, а высоты их равны (как равные высоте трапеции $ABCD$); следовательно, и площади их равны.

Тр-ки AOL и DOL равновелики, так как основания их $AL = DL$, а высота общая, ибо вершина O у них общая, а основания AL и DL лежат на одной прямой. Подобным образом, и тр-ки BOK и KOC равновелики. Следовательно, если от равных площадей $ABKL$ и $KCDL$ отнять равные площади $(AOL+EOK)=(DOL+KOC)$, то остающиеся площади тр-ков AOB и DOC тоже будут равны.

650. Соединим середину O боковой стороны AB с вершинами C и D. Пусть основание $BC = a$, основание $AD = b$, высота $BE = KL = h$.

Площадь трапеции $ABCD = \frac{(BC + AD)BE}{2} = \frac{(a+b).h}{2}$.

Площадь тр-ка $AOD = \frac{AD.OL}{2} = \frac{b}{2}.\frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$.

Площадь тр-ка $BOC = \frac{BC.OK}{2} = \frac{a}{2}.\frac{h}{2} = \frac{ah}{4}$.

Сумма площадей тр-ков AOD и BOC равна $\frac{bh}{4} + \frac{ah}{4} = \frac{h}{4}(a+b)$. Сравнивая это выражение с выражением площади трапеции, видим, что эта сумма есть половина выражения для площади трапеции. Следовательно, разность (наглядная) между площадью трапеции и суммой площадей тр-ков AOD и EOC есть тр-к OCD, а численная разность эта равна половине площади трапеции.

651. Пусть диагональ AC делит трапецию в отношении $3:7$ $(ABD:ACD)$. Проведя CE параллельно AB, мы получим параллелограм $ABCE$, который диагональю AC делится пополам $(ABC=ACE)$.

Пусть площадь тр-ка ABC равна $3x$, тр-ка ACD — $7x$; тогда и площадь тр-ка ACE равна $3x$; следовательно, площадь тр-ка CED равна $7x - 3x = 4x$, а площадь параллелограма $ABCE$: $3x+3x = 6x$.

Искомое отношение площадей параллелограма $ABCD$ и тр-ка CED равно $6x:4x = 3:2$.

652. Пусть $AC = b$, $BC = a$

В тр-ках ABC и KAL стороны $AB = AL$, $AC = AK$; сумма же углов BAC и KAL равна $2d$, ибо сумма всех углов вокруг одной точки (A) равна $4d$, из них 2 угла BAL и CAK прямые; следовательно, сумма остальных 2-х углов — BAC и KAL — равна $2d$. В таком случае, тр-ки ABC и KAL равновелики. Чтобы доказать это, достаточно повернуть тр-к KAL вокруг общей вер-

шины A так, чтобы AL и AB совпали; тогда AK примет положение AL_1, на одной прямой с AC (согласно обратной теореме из геометрии: если два угла имеют общую вершину, общую сторону и сумма их равна $2d$, то и другие две стороны лежат на одной прямой).

Тр-ки ABC и ABL_1, имеющие равные основания ($AC = AK = AL_1$), лежащие на одной прямой CL_1, и общую вершину B (следовательно, и общую высоту), равновелики.

Подобным образом можно доказать, что и тр-к MBN равновелик тр-ку ABC.

Тр-к же PCQ равен тр-ку ABC, ибо катеты у обоих равны соответственно: $FC = BC$ и $CQ = AC$.

Итак, площадь 6-угольника $PMNLKQ$ состоит из квадратов $PMBC = a^2$, $QCAK = b^2$, $ABNL = AB^2 = a^2 + b^2$ и 4-х равновеликих тр-ков (MBN, ALK, PCQ и ABC), сумма площадей которых равна учетверенной площади тр-ка ABC, т.-е. $4 \cdot \frac{AC \cdot BC}{2} = 2ab$.

Итак, искомая площадь равна: $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) + 2ab = 2(a^2 + ab + b^2)$.

Правило. Два тр-ка, у которых две стороны одного равны двум сторонам другого, а углы, заключенные между ними, в сумме равны $2d$, — равновелики.

653. На тр-к ABC со сторонами $AB = 12$ *см*, $AC = 28$ *см* наложим тр-к ADE, имеющий равный с тр-ком ABC угол A (как показано на чертеже), а стороны $AD = 21$ *см*, $AE = 24$ *см*.

Площади 2-х тр-ков, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол. Следовательно, площади тр-ков ABC и ADE относятся, как $AB \cdot AC : AD \cdot AE = 12 \cdot 28 : 21 \cdot 24 = 2 : 3$.

654. Пусть $AB = a$, $BC = b$; $AD = 0{,}2 \cdot AB = {}^1/_5 a$, следовательно, $BD = AB + AD = a + {}^1/_5 a = {}^6/_5 a$; $CE = {}^2/_3 BC = {}^2/_3 b$, следовательно, $BE = BC + CE = b + {}^2/_3 b = {}^5/_3 b$.

Площади тр-ков ABC и DBE, заключающих общий угол B, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол (известная теорема). Следовательно, отношение площадей тр-ков $ABC : DBE = AB \cdot BC : BD \cdot BE = a \cdot b : {}^6/_5 a \cdot {}^5/_3 b = 1 : 2$.

655. Пусть BD — биссектриса угла B, т.-е. $\angle ABD = \angle DBC$. Опустим высоту BE на сторону AC.

Площадь тр-ка $ABD = \frac{AD \cdot BE}{2}$, тр-ка $BDC = \frac{DC \cdot BE}{2}$; отношение площадей тр-ков $ABD : BDC = \frac{AD \cdot BE}{2} : \frac{DC \cdot BE}{2} = AD : DC$.

На основании теоремы: „площади 2-х тр-ков, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол". имеем ($\angle ABD = \angle DBC$): отношение площадей тр-ков $ABD : BDC = AB \cdot BD : BC \cdot BD = AB : BC$.

Сравнивая оба выражения для отношения площадей тр-ков ABD и BDC, находим: $AB : BC = AD : DC$.

656. Примечание. Достаточно увеличить в n раз только 2 стороны, чтобы и третья сторона увеличилась в n раз.

Имеем теорему: „если 2 тр-ка имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами, то такие тр-ки подобны", т.-е. и третьи стороны пропорциональны. Значит, если 2 стороны увеличить в n раз, то и третья сторона увеличивается в n раз. Пусть 2 стороны AB и AC одного тр-ка ABC будут a и b; тогда в измененном тр-ке ADE соответственные стороны AD и AE будут $4a$ и $4b$.

Так как площади 2-х тр-ков, заключающих равные углы, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол, то искомое отношение будет $AB \cdot AC : AD \cdot AE = 4a \cdot 4b : ab = 16$.

В случае увеличения сторон в 5 раз, имеем отношение $5a \cdot 5b : a \cdot b = 25$.

657. Пусть сходственная сторона подобного тр-ка — x. Так как отношение площадей подобных тр-ков равно отношению квадратов сходственных сторон, то имеем отношение: $\frac{x^2}{5^2} = 2$, откуда $x = 5\sqrt{2} = 7{,}07 \ldots$ *см.*

658. Так как средняя линия DE тр-ка вдвое меньше основания AC, то, обозначив $DE = x$, $AC = 2x$, напишем: $\frac{\text{пл. } BDE}{\text{пл. } ABC} = \frac{x^2}{(2x)^2} = \frac{1}{4}$ (площади подобных тр-ков относятся, как квадраты сходственных сторон).

659. Пусть KL, параллельная основанию AC, делит площадь тр-ка ABC пополам, т.-е. площадь тр-ка BKL равна половине площади тр-ка ABC. Вследствие параллельности сторон AC и KL, тр-ки ABC и BKL подобны. Искомое расстояние BE найдется из пропорции: $\frac{\text{пл. } KBL}{\text{пл. } ABC} = \frac{BE^2}{BD^2}$, так как площади подобных тр-ков пропорциональны квадратам сходственных высот. Обозначив высоту BD через h и зная, что отношение площадей

KBL и ABC равно $^1/_2$, перепишем пропорцию так: $\frac{1}{2} = \frac{BE^2}{h^2}$, или $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{BE}{h}$, откуда $BE = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{h\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4h}{2} = 0{,}7h$ (приблизительно).

660. Пусть $BD : DF : FA = 2 : 3 : 4$. Обозначим $BD = 2x$, $DF = 3x$, $FA = 4x$. Следовательно, $BF = BD + DF = 2x + 3x = 5x$, $AB = BD + DF + FA = 2x + 3x + 4x = 9x$.

Тр-ки ABC, FBG и DBE подобны между собою. Так как площади подобных тр-ков относятся как квадраты сходственных сторон, то: $\frac{\text{пл. } DBE}{\text{пл. } FBG} = \frac{(2x)^2}{(5x)^2} = \frac{4}{25}$. Пусть площ. $DBE = 4y$, тогда площадь $FBG = 25y$.

$\frac{\text{пл. } DBE}{\text{пл. } ABC} = \frac{(2x)^2}{(9x)^2} = \frac{4}{81}$. Если $DBE = 4y$, то площадь $ABC = 81y$.

Очевидно, площадь трапеции $DEGF$ будет $25y - 4y = 21y$; площадь трапеции $AFGC = 81y - 25y = 56y$.

Итак, площадь тр ка ABC разделилась на части в отношении $4y : 21y : 56y$, или $4 : 21 : 56$.

661. Пусть $BD : AD = 5 : 3$; т. к. $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$, то, составив производную пропорцию $\frac{AD + BD}{BD} = \frac{3 + 5}{5}$, перепишем ее: $\frac{AB}{BD} = \frac{8}{5}$. Тр-ки ABC и DBE подобны ($AC \parallel DE$). Площади подобных тр-ков относятся, как квадраты сходственных сторон. Следовательно, $\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } DBE} = \frac{AB^2}{BD^2} = \frac{8^2}{5^2} = \frac{64}{25}$. Пусть площадь тр-ка ABC содержит $64x$, площадь тр-ка DBE — $25x$, тогда площадь трапеции $ADEC$ — разность $64x - 25x = 39x$. По условию, площадь $ADEC$ — пл. $DBE = 39x - 25x = 14x = 56$ см^2. Отсюда $x = {}^{56}/_{14} = 4$ см^2. Искомая площадь $ABC = 64x = 64 \cdot 4 = 256$ см^2.

662. Пусть параллельные DE и FG делят площадь тр-ка на части так: $BDE : DFEG : AFGC = 9 : 55 : 161$. Очевидно, соотношение площадей тр-ков $BDE : FBG : ABC = 9 : (9 + 55) : (9 + 55 + 161) = 9 : 64 : 225$. Так как тр-ки DBE, FBG и ABC — вследствие параллельности прямых DE, FG и AC — подобны друг другу, то имеем: пл. DBE : пл. FBG : пл. $ABC = BD^2 : BF^2 : AB^2 = 9 : 64 : 225$, откуда $BD : BF : AB = 3 : 8 : 15$.

Следовательно, если $BD=3x$. $BF=8x$, $AB=15x$, то $DF=BF-BD=8x-3x=5x$; $AF=AB-BF=15x-8x=7x$. Соотношение отрезков $BD:DF:AF=3x:5x:7x=3:5:7$.

663. Площади одноименных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, радиусов или апофемо.

1) Пусть радиус данного круга r; это и есть радиус внутреннего тр-ка и апофема внешнего. Радиус правильного тр-ка вдвое больше апофемы; значит, радиус внешнего круга равен двойной его апофеме, т.-е. $2r$. Отношение площадей правильных одноименных многоугольников равно отношению квадратов их радиусов, т.-е. $\frac{r^2}{(2r)^2}=\frac{1}{4}$.

2) Пусть радиус круга r. Значит, сторона вписанного квадрата $-r\sqrt{2}$, сторона описанного квадрата $-2r$. Отношение их площадей равно отношению квадратов сторон: $\frac{(r\sqrt{2})^2}{(2r)^2}=\frac{1}{2}$.

3) Пусть радиус данного круга r. Апофема правильного 6-угольника равна $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ (как высота правильного тр-ка со стороной r), апофемой же описанного 6-угольника будет r. Отношение площадей правильных одноименных многоугольников равно отношению квадратов апофем: $\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2:r^2=\frac{3}{4}$.

664. Отношение площадей подобных многоугольников равно отношению квадратов сходственных сторон или периметров.

Следовательно, отношение площадей этих многоугольников равно: $2^2:3^2:4^2=4:9:16$. Пусть площади их будут $4x$, $9x$ и $16x$, тогда имеем: $4x+9x+16x=29x=232$ м², откуда $x=\frac{232}{29}=8$ м².

Искомые площади будут:

$4x=4.8=32$ м²; $9x=9.8=72$ м²; $16x=16.8=128$ м².

665. Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон. В отсеченном параллелограме $ABCD$, очевидно, EF будет большей стороной.

Пусть $AB=2x$, $BC=3x$. Отношение площадей $ABCD:ABEF=BC^2$ $AB^2=(3x)^2:(2x)^2=9:4$ Если $ABCD$ обозначить через $9x$, то $ABEF=4x$, а $ECDF=ABCD-ABEF=9x-4x=5x$.

Искомое отношение площадей $ABEF:ECDF=4x:5x=4:5$.

666. Пусть параллельная EF делит трапецию $ABCD$ на две подобные трапеции $EBCF$ и $AEFD$.

Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон. В трапеции $EBCF$ меньшее основание $BC = a$, большее EF; в трапеции $AEFD$ меньшее основание EF, большее $AD = b$.

Имеем пропорцию (сходственные стороны пропорциональны):

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EF}{AD} \text{ или } \frac{a}{EF} = \frac{EF}{b}, \text{ откуда } EF = \sqrt{ab}.$$

Напишем отношение площадей:

$$\frac{\text{пл. } EBCF}{\text{пл. } AEFD} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}.$$

667. Пусть E, F, G, H — середины сторон параллелограма $ABCD$, площадь которого обозначим P.

Полученный 4-угольник $KLMN$ действительно параллелограм: $BH \parallel FD$, ибо BF равна и параллельна HD, следовательно, и BH равна и параллельна FD. Подобным же образом доказывается, что и $EC \parallel AG$.

Площадь параллелограмма $BHDF$, основание которого $HD = \frac{AD}{2}$, а высота равна высоте параллелограма $ABCD$, равна половине площади параллелограма $ABCD$, т.-е. $\frac{P}{2}$.

Пусть основанием искомого параллелограма $KLMN$ будет $KN = x$. Рассматривая подобные тр-ки ABN и EBK ($EK \parallel AN$), видим, что $BE = AE$, следовательно, и $BK = KN = x$; рассматривая подобные тр-ки BKC и FLC, видим, что $FC = \frac{BC}{2}$, следовательно, и $FL = \frac{BK}{2} = \frac{x}{2}$.

Трапеции $BFLK$ и $HNMD$ равны, вследствие равенства сторон и углов (доказать нетрудно).

Параллелограм $BHDF$ разбивается на 3 части: искомый параллелограм $KLMN$, площадь которого равна $KN.h$ (считая условно высотой h) $= xh$, и 2 трапеции, равные между собой, площадь каждой из которых, напр., $BFLK$ равна $\frac{BK + FL}{2} h = \frac{x + \frac{x}{2}}{2} h$, а сумма площадей обеих — $\left(x + \frac{x}{2}\right)h$.

Итак, площадь параллелограма $BHDF$ равна $\frac{P}{2}$ и выражается суммой $xh + \left(x + \frac{x}{2}\right)h$. Напишем ур-ие:

$$\frac{P}{2} = xh + \left(x + \frac{x}{2}\right)h, \text{ откуда } xh = \frac{P}{5}.$$

Примечание. Нам требуется найти площадь, выражающуюся формулой xh. Поэтому, не определяя отдельно x и h (что иногда и невозможно), находим сразу более сложную, но нужную нам формулу, чем упрощаем себе работу.

668. Пусть продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекутся в точке E. По условию, площади тр-ка BEC и трапеции $ABCD$ равновелики; следовательно, площадь тр-ка AED вдвое больше площади тр-ка BEC. Следовательно, $\frac{\text{пл. } BEC}{\text{пл. } AED} = \frac{1}{2}$; но тр-ки BEC и AED подобны ($BC \parallel AD$), а потому их площади будут относиться, как квадраты сходственных сторон BC и AD, т.-е.

$$\frac{\text{пл. } BEC}{\text{пл. } AED} = \frac{BC^2}{AD^2}, \text{ а потому } \frac{BC^2}{AD^2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \frac{BC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

669. Пусть в тр-ке ABC проведена прямая DE, так что $\frac{BD}{DA} = \frac{3}{7}$, площадь же тр-ка BDE относится к площади трапеции, как $3:22$; если обозначить площадь тр-ка BDE через $3x$, то $ADEC$ будет $22x$, а площадь тр-ка $ABC = 3x + 22x = 25x$.

Если бы DE была параллельна AC, тр-ки BDE и ABC были бы подобны и отношение их площадей $\frac{3x}{25x} = \frac{3}{25}$ равнялось бы квадрату отношения сходственных сторон, т.-е. $\left(\frac{BD}{AB}\right)^2$. Обозначив BD через $3y$, $DA = 7y$, а, значит, $AB = BD + DA = 3y + 7y = 10y$, напишем $\left(\frac{BD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3y}{10y}\right)^2 = \frac{9}{100}$. Так как $\frac{3}{25} \neq \frac{9}{100}$, прямая DE не параллельна AC.

Площади тр-ков, имеющих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол. Значит, площади тр-ков ABC и BDE относятся, как $AB \cdot BC : BD \cdot BE$, или как $25:3$ (по условию).

Имеем пропорцию: $\frac{AB \cdot BC}{BD \cdot BE} = \frac{25}{3}$, или $\frac{10y \cdot BC}{3y \cdot BE} = \frac{25}{3}$, откуда $\frac{BC}{BE} = \frac{5}{2}$. Составим производную пропорцию: $\frac{BC - BE}{BE} = \frac{5-2}{2}$, или $\frac{EC}{BE} = \frac{3}{2}$, т.-е. сторона BC разделилась на части в отношении 2:3, считая от вершины.

670. Разделим стороны тр-ка, на 3 равные части каждую, и соединим между собой точки деления через одну; получим тр-к DEF. Площадь этого тр-ка равна площади тр-ка ABC без площади трех тр-ков ADF, BDE и ECF.

Опустим высоты BK и DL.

Площадь тр-ка $ABC = \frac{AC \cdot BK}{2}$.

Площадь тр-ка $ADF = \frac{AF \cdot DL}{2}$; но $AF = \frac{2}{3} AC$, $DL = {}^1/_3\ BK$ (что выводится из пропорции на основании подобия тр-ков ADL и ABK: $\frac{DL}{BK} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, откуда $DL = \frac{1}{3} BK$). Следовательно, пропорция перепишется так:

$$\frac{AF \cdot DL}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AC \cdot \frac{1}{3} BK = \frac{1}{9} AC \cdot BK = \frac{2}{9} \text{ пл. } ABC.$$

Подобным образом можно вывести, что и площади тр-ков BDE и ECF равновелики ${}^2/_9$ пл. ABC каждый.

Искомая площадь = пл. $ABC - 3 \cdot {}^2/_9$ пл. $ABC = {}^1/_3$ пл. ABC.

671. Пусть BC — бо́льший катет = 20 *см*. Проведем $KL \perp AB$ так, что площадь $KBL = {}^1/_2$ площ. ABC. Надо найти длину отрезка BL, который обозначим через x. Прямоугольные тр-ки BKL и ABC подобны, ибо у обоих общий острый угол B; из подобия их следует: $\frac{KL}{AC} = \frac{BL}{BC}$, или $\frac{KL}{AC} = \frac{x}{20}$. По условию, площадь тр-ка $BKL = \frac{BL \cdot KL}{2} = \frac{x \cdot KL}{2}$ равна половине площади $ABC = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{20 \cdot AC}{2}$, т.-е. $\frac{x \cdot KL}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot AC}{2}$, или $x \cdot KL = 10 AC$, откуда $\frac{KL}{AC} = \frac{10}{x}$. Итак, $\frac{x}{20} = \frac{10}{x}$, или $x^2 = 200$, откуда

$$x = \sqrt{200} = 14{,}14\ldots \text{ см}.$$

672. Пусть катет $AC = 3x$, катет $BC = 4x$. Тр-ки ACD и BCD подобны, ибо стороны углов их (напр., DAC и BCD) взаимно перпендикулярны. Площади подобных тр-ков относятся, как квадраты сходственных сторон; следовательно,

пл. тр-ка ACD : пл. тр-ка $BCD = AC^2 : BC^2 = (3x)^2 : (4x)^2 = 9 : 16$.

Пусть площадь тр-ка $ACD = 9y$, пл. тр-ка $BCD = 16y$; тогда площадь тр-ка $ABC = 9y + 16y = 25y$.

По условию, разность площадей тр-ков BCD и ACD равна 84 $см^2$, т.-е. $16y - 9y = 84$ $см^2$, откуда $y = 12$ $см^2$. Искомая площадь тр-ка $ABC = 25y = 25 \cdot 12 = 300$ $см^2$.

673. Пусть $DE \parallel AC$, $DF \parallel BC$ и $BD : DA = m : n$. Обозначим BD через mx, DA — nx; сторона $AB = BD + DA = mx + nx = (m + n)x$. Тр-к BDE подобен тр-ку ABC; отношение их площадей равно отношению квадратов сходственных сторон:

$$\frac{\text{пл. } BDE}{\text{пл. } ABC} = \frac{BD^2}{BA^2} = \frac{m^2x^2}{(m+n)^2x^2} = \frac{m^2}{(m+n)^2}.$$

Точно так же $\dfrac{\text{пл. } ADF}{\text{пл. } ABC} = \dfrac{AD^2}{AB^2} = \dfrac{n^2x^2}{(m+n)^2x^2} = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}$.

Если обозначить площадь тр-ка BDE через m^2y, тогда площадь тр-ка ADF — n^2y, площадь тр-ка ABC — $(m + n)^2y$. Площадь параллелограма $DECF$ равна разности между площадью тр-ка ABC и суммой площадей тр-ков DBE и ADF, т.-е. площадь $DECF = (m + n)^2y - (m^2y + n^2y) = 2mny$.

Отношение площадей, на которые разделился тр-к ABC, равно: $m^2y : n^2y : 2mny = m^2 : n^2 : 2mn$.

674. Пусть $AC = 2x$, $AB = 3x$.

Так как (известная теорема) касательная есть средняя пропорциональная между секущей и внешней ее частью, то:

$AB^2 = AD \cdot AC$, или $(3x)^2 = AD \cdot 2x$, откуда $AD = {}^9/_2x$.

Площади тр-ков ABD и ABC, имеющих общий угол, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол: пл. ABD : пл. $ABC = AB \cdot AD : AB \cdot AC = AD : AC = {}^9/_2x : 2x = 9 : 4$. Пусть пл. тр-ка $ABD = 9y$, $ABC = 4y$; тогда искомая площадь $BCD = 9y - 4y = 5y$. Но, по условию, площадь тр-ка $ABC = 20$ $см^2$; следовательно, $4y = 20$ $см^2$, откуда $y = 5$ $см^2$. Искомая площадь $5y = 5 \cdot 5 = 25$ $см^2$.

675. Пусть дуга $AB = 120°$; тогда хорда AB — сторона правильного вписанного тр-ка и равна $r\sqrt{3}$ (считая r — радиус описанного круга). Хорда CD, стягивающая дугу в 90°, есть сторона вписанного квадрата и равна $r\sqrt{2}$;

отношение $AB : CD = r\sqrt{3} : r\sqrt{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

Тр-ки ABM и CDM подобны, так как $\angle A = \angle C$, как вписанные, измеряющиеся оба половиной дуги BD; также равны и углы ABC и ADC.

Площади подобных тр-ков ABM и DCM относятся, как квадраты сходственных сторон:

$$\frac{\text{пл. } ABM}{\text{пл. } DCM} = \frac{AB^2}{CD^2} = \frac{3}{2}.$$

Пусть площадь тр-ка $ABM = 3x$, площадь тр-ка $DCM = 2x$; сумма этих площадей $3x + 2x = 5x = 100$ *см*², откуда $x = 20$ *см*².

Искомые площади тр-ка $ABM = 3x = 60$ *см*², тр-ка $DCM = 2x = 40$ *см*².

676. Пусть радиус окружности r.

Хорда CB, стягивающая дугу в 60°, равна $a_6 = r$; хорда AC, стягивающая дугу в $180° - 60° = 120°$, равна $a_3 = r\sqrt{3}$. Опустим перпендикуляр CE из точки C на диаметр. Величина его найдется из сравнения 2-х выражений для площади прямоугольного тр-ка ABC:

$$\frac{AB \cdot CE}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2}, \text{ или } \frac{2r \cdot CE}{2} = \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } CE = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

(Можно также определить CE из прямоугольного тр-ка ACE, где гипотенуза $AC = r\sqrt{3}$, а $\angle A = 30°$, так как измеряется половиной дуги BC, равной 60°. По зад. 67, $CE = \frac{AC}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$).

Касательная CD определится из прямоугольного тр-ка ECD, у которого угол D измеряется полуразностью дуг AC и BC, т.-е. $\frac{120° - 60°}{2} = 30°$. По зад. 67, $CD = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

Следовательно, $AC = CD$.

Площадь $ACD = \frac{AD \cdot CE}{2} = AE \cdot CE$; из прямоугольного тр-ка ACE, у которого $\angle A = 30°$, определим катет

$$AE = \frac{AC}{2}\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}r.$$

Следовательно, площадь тр-ка $ACD = AE \cdot CE =$

$$= {}^3/_2 r \cdot {}^1/_2 r\sqrt{3} = {}^3/_4 r^2\sqrt{3}.$$

Площадь тр-ка DCB равна разности площадей тр-ков DCA и ACB. Площадь тр-ка $ACB = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot r}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$, а потому площадь тр-ка $DCB =$ пл. $ACD -$ пл. $ACB = {}^3/_4 r^2\sqrt{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Искомое отношение площадей тр-ков DCB и ACD равно: $\frac{r^2}{4}\sqrt{3} : \frac{3}{4}r^2\sqrt{3} = 1 : 3$.

677. Пусть площадь тр-ка $BDE = P$.

Тр-ки BDE и ABC подобны, и площади их относятся, как квадраты сходственных сторон: $\frac{\text{пл. тр-ка } BDE}{\text{пл. тр-ка } ABC} = \frac{P}{Q} = \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{1}{n^2}$ (длина BD в n раз меньше AB). Отсюда $P = \frac{Q}{n^2}$.

Сумма площадей прямоугольных тр-ков, отсекаемых от каждой полосы, равна площади верхнего тр-ка BDE, т. к. тр-к, напр., KDM = тр-ку OBD, а тр-к ELN = тр-ку OBE ($KD = DM$, $EL = BE$, а углы их, вследствие параллельности оснований, также равны).

Всех пар тр-ков — n, значит, сумма их площадей равна $\frac{n \cdot Q}{n^2} = \frac{Q}{n}$.

Искомая сумма площадей прямоугольников равна разности между площадью тр-ка ABC и суммой площадей отрезанных тр-ков, т.-е. $Q - \frac{Q}{n} = \frac{Q(n-1)}{n}$

678. 1) Радиус внутреннего 6-угольника равен апофеме внешнего.

Пусть радиус внешнего 6-угольника — r, тогда апофема его равна $^1/_2 r\sqrt{3}$ (как высота равностороннего тр-ка со стороной r); следовательно, радиус внутреннего 6-угольника равен $^1/_2 r\sqrt{3}$.

Площади правильных одноименных многоугольников относятся, как квадраты радиусов.

Следов., искомое отношение: $r^2 : \left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2 : \frac{3r^2}{4} = 4 : 3$.

2) Тр-к AA_1F — равносторонний, т. к. $\angle A_1AF = 60°$, как вписанный, опирающийся на дугу $CE = 120°$, а BF, параллельная CE, отрезает от равных сторон AC и AE равные части $AA_1 = AF_1$. Следовательно, $AA_1 = A_1F_1 = A_1B_1$.

Подобным образом и $B_1C = A_1B_1$.

Следовательно, сторона внутреннего 6-угольника $A_1B_1 = {}^1/_3 AC$; но $AC = a_3 = r\sqrt{3}$, а потому $A_1B_1 = \frac{1}{3} AC = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

Сторона 6-угольника $ABCDEF$ равна r.

Отношение площадей правильных одноименных многоугольников равно отношению квадратов радиусов; следовательно, искомое отношение равно

$$A_1B_1^2 : AB^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 : r^2 = \frac{r^2}{3} : r^2 = 1 : 3.$$

Это можно доказать и наглядно.

Соединив центр O с вершинами A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, разобьем всю фигуру на 18 равновеликих тр-ков. В самом деле, тр-ки, напр., AA_1F_1 и AA_1B имеют равные основания $F_1A_1 = A_1B$ и общую вершину A (значит, и общую высоту), следовательно, они равновелики; тр-ки AA_1F_1 и A_1F_1O равны, так как все стороны этих тр-ков равны каждая стороне внутреннего 6-угольника.

Внешний 6-угольник состоит из 18 тр-ков, внутренний из 6. Следовательно, площадь внутреннего 6-угольника равна $^6/_{18} = {}^1/_3$ площади внешнего.

679. Искомый тр-к BMC — прямоугольный. В самом деле. Угол FCD равен углу EBC, вследствие равенства прямоугольных тр-ков FCD и EBC. Пусть $\angle FCD = \angle EBC = \alpha$. Угол FCB равен $\angle BCD - \angle FCD = 90° - \alpha$. Рассматривая тр-к BMC, видим, что сумма углов MBC и BCM равна $\alpha + (90° - \alpha) = 90°$. Следовательно, 3-й угол BMC равен $180° - 90° = 90°$, т.-е. $BM \perp CM$.

Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a, тогда площадь его равна a^2.

Из прямоугольного тр-ка BCE, у которого катеты: $BC = a$, $CE = \frac{a}{2}$, находим: $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$;

$BM = \frac{BC^2}{BE} = \frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ (зад. 335); $CM = \frac{BC \cdot CE}{BE} =$

$= a \cdot \frac{a}{2} : \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. Площадь тр-ка $BCM = \frac{BM \cdot MC}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5}$. Искомое отношение площади квадрата к площади тр-ка BMC равно $\frac{a^2}{5} : a^2 = \frac{1}{5}$.

680. Площади тр-ков ABD и BDC, имеющие общую высоту BD, относятся, как основания $AD : DC = 18$ *см* $: 7$ *см* $= 18 : 7$.

Пусть площадь $ABD = 18x$, площадь $BDC = 7x$, площадь всего тр-ка ABC равна $18x + 7x = 25x$.

Проведем перпендикуляр KL, делящий площадь тр-ка ABC пополам, т.-е. площадь AKL равна половине площади тр-ка ABC и выражается $^1/_2 . 25x = \frac{25}{2}x$.

Тр-ки ABD и AKL подобны, вследствие параллельности прямых KL и BD. Площади подобных тр-ков относятся, как квадраты сходственных сторон. Пусть искомая $AL = y$, тогда пл. ABD : пл. $AKL = AD^2 : AL^2$, или $18x : {}^{25}/_2 x = 18^2 : y^2$, откуда $y^2 = 225$, или $y = 15$ *см*.

681. Пусть $AB = x$, $BC = 3x$.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{x^2}{(3x)^2} = \frac{1}{9}$$

(проекции катетов на гипотенузу относятся, как квадраты катетов)

Из подобия тр-ков ABC и ADE имеем:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}, \text{ или } \frac{DE}{3x} = \frac{1}{1+9}, \text{ откуда } DE = \frac{3}{10}x.$$

Из подобия тр-ков ABC и DCF имеем:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{DC}{AC}, \text{ или } \frac{DF}{x} = \frac{9}{1+9}, \text{ откуда } DF = \frac{9}{10}x.$$

Площадь прямоугольника $BEDF = DE \cdot DF = {}^3/_{10}x \cdot {}^9/_{10}x = {}^{27}/_{100}x^2$.

Площадь тр-ка $ABC = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{x \cdot 3x}{2} = \dfrac{3}{2}x^2$.

Отношение площади тр-ка ABC к площади прямоугольника $BEDF$ равно: ${}^{27}/_{100}x^2 : {}^3/_2x^2 = 0{,}18$.

682. Пусть $ADEF$ — ромб, вписанный в тр-к ABC, согласно условию. Пусть $AB = mx$, $AC = nx$. Обозначим сторону ромба через y.

Тр-ки ABC и BDE подобны, т. к. $DE \parallel AC$. Из подобия этих тр-ков имеем: $DE : AC = BD : AB$; здесь $DE = y$, $AC = nx$, $BD = AB - AD = mx - y$, $AB = mx$. Перепишем пропорцию:

$$\frac{y}{nx} = \frac{mx - y}{mx}, \text{ или } y(m+n) = mnx, \text{ откуда } y = \frac{mnx}{m+n}.$$

Соединим точки D и F; ромб разделился пополам (диагональ всегда делит параллелограм пополам). Площади тр-ков ADF и ABC, имеющих общий угол A, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол. Итак,

пл. ADF : пл. $ABC = AD \cdot AF : AB \cdot AC = y \cdot y : mx \cdot nx =$

$$= y^2 : mnx^2, \text{ или } \frac{\text{пл. } ADF}{\text{пл. } ABC} = \left(\frac{mnx}{m+n}\right)^2 : mnx^2 = \frac{mn}{(m+n)^2}, \text{ а}$$

$$\frac{2 \cdot \text{пл. } ADF}{\text{пл. } ABC} = \frac{2mn}{(m+n)^2}, \text{ или } \frac{\text{пл. } ADEC}{\text{пл. } ABC} = \frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

683. Площади ABD и DBC, имеющие по равному углу ($\angle ABD = \angle DBC$), относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол:

$$\frac{\text{пл. } ABD}{\text{пл. } DBC} = \frac{AB \cdot BD}{BD \cdot BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

Обозначим площадь $ABD = cy$, площадь $DBC = ay$; тогда и площадь $DEFC = cy$, а площадь $EBF = \text{пл. } DBC - \text{пл. } DEFC = ay - cy$. Пусть искомая $BF = x$. Тр-ки EBF и DBC подобны ($EF \parallel DC$), а потому площади их относятся, как квадраты сходственных сто-

рон. Имеем: $\frac{\text{пл. } EBF}{\text{пл. } DBC} = \frac{BF^2}{BC^2}$ или $\frac{ay - cy}{ay} = \frac{x^2}{a^2}$; по сокращении получим $x^2 = a(a-c)$, откуда $x = \sqrt{a(a-c)}$.

684. Пусть $\frac{AM}{MC} = \frac{CL}{LB} = \frac{BK}{KA} = \frac{m}{n}$. Опустим высоты BQ и KP.

Площадь тр-ка $ABC = \frac{AC \cdot BQ}{2}$. Площадь тр-ка $AKM = \frac{AM \cdot KP}{2}$; но $AM = \frac{m}{m+n} AC$; $\frac{KP}{BQ} = \frac{AK}{AB} = \frac{n}{m+n}$ $\left(\frac{BK}{AK} = \frac{m}{n}\right.$; составим производную пропорцию: $\frac{BK + AK}{AK} = \frac{m+n}{n}$ или $\frac{AB}{AK} = \frac{m+n}{n}$, откуда $\left.\frac{AK}{AB} = \frac{n}{m+n}\right)$, откуда $KP = \frac{n}{m+n} \cdot BQ$.

Следовательно:

площадь $AKM = {}^1/_2 \frac{m}{m+n} \cdot AC \cdot \frac{n}{m+n} \cdot BQ = \frac{mn}{2(m+n)^2} \cdot AC \cdot BQ$.

Отношение площадей $\frac{AKM}{ABC} = \frac{mn}{2(m+n)^2} \cdot AC \cdot BQ : \frac{AC \cdot BQ}{2} = \frac{mn}{(m+n)^2}$, откуда пл. AKM = пл. $ABC \cdot \frac{mn}{(m+n)^2}$.

Подобным образом и остальные тр-ки KBL и LMC выражаются так же, т.-е. все 3 тр-ка равны между собою.

Площадь тр-ка KLM равна разности между площадями тр-ка ABC и суммой тр-ков AKM, KBL и LMC, именно $ABC - 3ABC \frac{mn}{(m+n)^2} = ABC\left[1 - \frac{3mn}{(m+n)^2}\right] = ABC \cdot \frac{(m+n)^2 - 3mn}{(m+n)^2} = ABC \cdot \frac{m^2 + n^2 - mn}{(m+n)^2}$.

Итак, отношение площадей тр-ков KLM и ABC равно:

$$ABC \cdot \frac{m^2 + n^2 - mn}{(m+n)^2} : ABC = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}.$$

685. Пусть $BD = h$ в точке E делится в среднем и крайнем отношении, при чем $BE = x$ есть бо́льшая часть, а $ED = h - x$ есть меньшая часть.

Имеем равенство: $\frac{h}{x} = \frac{x}{h-x}$, или $h(h-x) = x^2$; приведем ур-ие к виду $x^2 + hx - h^2 = 0$. Решив ур-ие, найдем $x = \frac{h}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $h - x = h - \frac{h}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{h}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Пусть площадь $ABC = Q$, площадь $BKL = q$. Тр-ки ABC и BKL подобны, а потому площади их относятся, как квадраты сходственных сторон или высот:

$\frac{Q}{q} = \frac{BD^2}{BE^2} = h^2 : \left[\frac{h}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2$, откуда $q = \frac{Q}{2}(3-\sqrt{5})$.

Выше мы разделили h в крайнем и среднем отношении, для меньшей величины $h-x$ получили: $\frac{h}{2}(3-\sqrt{5})$. Следовательно, Q разделилось в крайнем и среднем отношении, при чем меньшей частью является верхняя—тр-к BKL.

686. Пусть $BC = a$, $AD = b$, искомая линия — EF.

Продолжим боковые стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке M.

Разность площадей $MAD - MEF$ равна площади трапеции $AEFD$.

Разность $MEF - MBC$ равна площади трапеции $BEFC$. Но трапеции $AEFD$ и $BEFC$ равновелики.

Следовательно, $MAD - MEF = MEF - MBC$ (1).

Площади подобных тр-ков относятся, как квадраты сходственных сторон: $\frac{\text{пл. } MAD}{\text{пл. } MEF} = \frac{AD^2}{EF^2} = \frac{b^2}{x^2}$; составим производную пропорцию: $\frac{MAD - MEF}{MEF} = \frac{b^2 - x^2}{x^2}$. Подобным же образом $\frac{\text{пл. } MBC}{\text{пл. } MEF} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{a^2}{x^2}$ и отсюда производная пропорция:

$$\frac{MBC - MEF}{MEF} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}, \text{ или } \frac{MEF - MBC}{MEF} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}.$$

Сравнивая обе производные пропорции, видим, что в левой части числители равны между собой [согласно равенству (1)], а знаменатели одинаковы. Следовательно, и правые части равны, именно: $\frac{b^2 - x^2}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, или $b^2 - x^2 = x^2 - a^2$, откуда $2x^2 = a^2 + b^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

687. 1) Тр-ки ABD и ACD равновелики, ибо основание AD у них общее, а высоты BK и CL равны. Если из ABD вычтем площадь AOD, получим боковой тр-к AOB; если же из равновеликого тр-ка ACD вычтем тот же тр-к AOD, то получим боковой тр-к COD. Следовательно, тр-ки AOB и COD равновелики.

2) Пусть $BC = a$, $AD = b$, $KL = h$.

Если из площади трапеции $ABCD$ вычесть площади тр-ков BOC и AOD, то получим искомую сумму площадей тр-ков AOB и COD. Тр-ки AOD и BOC подобны, ибо $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle CBD$, как накрест лежащие. Из подобия тр-ков имеем:

$\frac{OK}{OL} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$; значит, высота h делится в отношении $a:b$, т.-е. $OK = \frac{ah}{a+b}$; $OL = \frac{bh}{a+b}$.

Площадь тр-ка $OBC = \frac{BC \cdot OK}{2} = \frac{a \cdot ah}{2(a+b)} = \frac{a^2h}{2(a+b)}$; площадь тр-ка $AOD = \frac{AD \cdot OL}{2} = \frac{b \cdot bh}{2(a+b)} = \frac{b^2h}{2(a+b)}$; сумма площадей тр-ков OBC и AOD равна $\frac{a^2h}{2(a+b)} + \frac{b^2h}{2(a+b)} = \frac{h(a^2+b^2)}{2(a+b)}$.

Сумма площадей тр-ков AOB и COD равна разности площади трапеции $ABCD$ и суммы площадей тр-ков BOC и COD, т.-е.

$$\frac{(a+b)h}{2} - \frac{h(a^2+b^2)}{2(a+b)} = \frac{(a+b)^2h - (a^2+b^2)h}{2(a+b)} = \frac{abh}{a+b}.$$

688. 1) Как видно из зад. 687_2, площадь бокового тр-ка равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{abh}{a+b}$; площади же тр-ков при основании равны:

$$\frac{a^2h}{2(a+b)} \text{ и } \frac{b^2h}{2(a+b)}; \text{ но } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{abh}{a+b}\right)^2 = \frac{a^2h}{2(a+b)} \cdot \frac{b^2h}{2(a+b)},$$

что и требовалось доказать.

2) Как видно из зад. 687_2, сумма площадей AOD и BOC равна $\frac{h(a^2+b^2)}{2(a+b)}$, площадь трапеции $ABCD = \frac{(a+b)h}{2}$.

Искомое отношение: $\frac{h}{2} \cdot \frac{(a^2+b^2)}{(a+b)} : \frac{(a+b)h}{2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

689. Пусть AB — сторона правильного вписанного n-угольника. Проведем апофему OC и продолжим ее до пересечения в точке E с касательной, проведенной из точки A. Соединим хордой точку A с точкой D пересечения продолженной апофемы с окружностью.

Площадь OAE есть $\frac{1}{2n}$ площади описанного n-угольника; площадь OAC — $\frac{1}{2n}$ площади вписанного n-угольника; площадь OAD — $\frac{1}{2n}$ площади вписанного $2n$-угольника.

Таким образом соотношение площадей этих трех тр-ков будет и соотношением данных многоугольников.

Тр-ки AOE, AOC и AOD имеют общую вершину A, а основания лежат на одной прямой; значит, они имеют одну высоту; следовательно их площади относятся, как основания OE, OC, OD.

Тр-к AOE — прямоугольный, и OA есть катет, а катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и проекцией катета, т.-е.

$$OA^2 = OE \cdot OC.$$

Но $OA = OD$, как радиусы; поэтому формула перепишется так: $OD^2 = OE \cdot OC$, но OD есть основание тр-ка AOD, OE основание тр-ка AOE, OC основание тр-ка AOC. Следовательно, площадь тр-ка AOD есть средняя пропорциональная между площадями тр-ков AOE и AOC или, что одно и то же, площадь $2n$-угольника есть средняя пропорциональная между площадями описанного и вписанного n-угольников.

Определение в треугольнике: медиан, биссектрис и радиусов описанного и вписанного кругов.

690. Пусть a, b, c — стороны тр-ка, m_a, m_b, m_c соответственные медианы.

По формуле имеем:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = {}^3/_4 (a^2 + b^2 + c^2)$, откуда $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$.

691. 1) По формуле: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, имеем:

$$m^2 = \frac{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 19^2 - 22^2}{4} = 144 \text{ см}^2, \text{ откуда } m = \sqrt{144} = 12 \text{ см}.$$

2) По формуле (см. п. 1), имеем:

$$m_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - 4^2}{4}} = \sqrt{2{,}5};$$

$$m_b = \sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 - 2^2}{4}} = \sqrt{11{,}5};$$

$$m_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 - 3^2}{4}} = \sqrt{7{,}75}.$$

692. Пусть сторона AC тр-ка ABC равна 26 *см*, медиана ее $BD = 16$ *см*, а $AB : BC = 3 : 5$.

Обозначим AB через $3x$, BC — $5x$.

По формуле для медианы: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, имеем:

$16^2 = \frac{2 \cdot (5x)^2 + 2 \cdot (3x)^2 - 26^2}{4}$. Перепишем это ур-ие так:

$x^2 = 25$ *см*^{2}, откуда $x = 5$ *см*.

Искомые стороны: $AB = 3x = 15$ *см*; $BC = 5x = 25$ *см*.

693. Пусть катет $AC = x$, катет $BC = y$; медианы $BK = m$, $AL = n$.

Гипотенуза выразится тогда: $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$. Медиана гипотенузы равна половине гипотенузы. Для доказательства, опишем около прямоугольного тр-ка окружность. Гипотенуза AB будет диаметром, точка M — центром окружности, а искомая медиана CM — радиусом. Следовательно, медиана гипотенузы равна половине гипотенузы и выразится так: $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

По формуле для медианы $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$, имеем:

$$BK^2 = \frac{2BC^2 + 2AB^2 - AC^2}{4} \text{ или } m^2 = \frac{2y^2 + 2(x^2 + y^2) - x^2}{4} =$$

$$= \frac{4y^2 + x^2}{4} \quad (1).$$

Подобным же образом $n^2 = \frac{4x^2 + y^2}{4}$ (2).

Сложив ур-ия (1) и (2) почленно, найдем: $x^2 + y^2 = \frac{4(m^2 + n^2)}{5}$,

откуда искомая медиана: $\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{5}}$.

Примечание. Так как требуется отыскать выражение для формулы $\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, то нет надобности находить порознь x и y. Взглянув на ур-ия (1) и (2), замечаем, что $x^2 + y^2$ найдется сразу если сложить ур-ия (1) и (2) почленно.

694. 1) Пусть в трапеции $ABCD$ основания $AD = a$, $BC = b$, $\angle BAD + \angle CDA = 90°$.

Чтобы определить длину прямой KL, соединяющей середины K и L оснований, продолжим боковые стороны AB и DC до взаимного пересечения в точке M.

Полученный тр-к AMD, очевидно, прямоугольный, ибо, по условию, $\angle MAD + \angle MDA = 90°$. Если проведем медиану ML, то она пересечет BC, параллельную гипотенузе тр-ка AMC, тоже посередине в точке K, и, следовательно, совпадет с искомой прямой KL.

Искомая $KL = ML - MK$. Но ML есть медиана гипотенузы AD и равна половине гипотенузы (зад. 693), именно $\frac{a}{2}$, а MK — медиана гипотенузы BC и равна $\frac{b}{2}$. Следовательно, $KL = ML - MK = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$.

2) Пусть в трапеции $ABCD$ основания $BC = 9$ *см* и $AD = 23$ *см*, боковые стороны $AB = 7$ *см* и $CD = 11$ *см*. Прямая KL — искомая, соединяющая середины K и L оснований трапеции.

Проведем $BN \parallel KL$ и $BM \parallel CD$. В тр-ке ABM прямая BN будет медианой. В самом деле: $AN = AL - NL = AL - BK = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$; тр-ки BNM и $KLP (KP \parallel CD)$ равны между собой, так как $BN = KL$, $BM = KP$, как отрезки параллельных между параллельными, углы же NBM и LKP, составленные взаимно параллельными сторонами $BN \parallel KL$, $BM \parallel KP$, тоже равны между собой, а потому $NM = LP$; но $LP = LD - PD = LD - KC = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$; следовательно, и $NM = LP = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$. Таким образом $AN = NM$, т.-е. BN есть медиана.

В тр-ке ABM стороны $AB = 7$ *см*, $BM = CD = 11$ *см*, $AM = AD - MD = AD - BC = 23 - 9 = 14$ *см*.

По формуле для медианы: $m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$, имеем:

$$m = \sqrt{\frac{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BM^2 - AM^2}{4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2 - 14^2}{4}} = 6 \text{ см}.$$

695. Теорема. Квадрат биссектрисы равен разности между произведением сторон, заключающих разделенный угол и произведением отрезков третьей стороны.

Обозначим биссектрису $AD = l$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = c_1$, $DC = b_1$; тогда $l^2 = bc - b_1c_1$.

Для доказательства, опишем окружность около тр-ка ABC; продолжим биссектрису до пересечения в точке E с окружностью

и соединим точки E и B. Тр-ки ABE и ADC подобны, т. к. $\angle BAE = \angle CAD$ (по условию), а $\angle E = \angle C$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Из подобия их следует: $c : l = AE : b$, откуда $bc = l \cdot AE$, или $bc = l(l + DE) = l^2 + l \cdot DE$; но $l \cdot DE = BD \cdot DC$ (произведения отрезков хорд, пересекающихся в одной точке, равны между собою). Поэтому $bc = l^2 + BD \cdot DC = l^2 + b_1c_1$, откуда $l^2 = bc - b_1c_1$.

1) Пусть отрезки стороны $a = 7$ будут $a_1 = x$ и $b_1 = 7 - x$. По теореме, $\frac{x}{7-x} = \frac{6}{8}$; перепишем ур-ие так: $4x = 21 - 3x$, откуда $x = 3$; $7 - x = 7 - 3 = 4$.

По приведенной формуле, $l^2 = bc - b_1c_1 = 6 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 36$; $l = 6$.

2) Пусть отрезки стороны $a = 18$ будут $a_1 = x$ и $b_1 = 18 - x$. По теореме, $\frac{x}{18-x} = \frac{15}{12}$; перепишем это ур-ие так: $4x = 90 - 5x$, откуда $x = 10$; $18 - x = 18 - 10 = 8$.

По приведенной формуле, $l^2 = bc - b_1c_1 = 15 \cdot 12 - 8 \cdot 10 = 100$; $l = 10$.

3) Пусть отрезки стороны $a = 39$ будут $a_1 = x$ и $b_1 = 39 - x$. По теореме, $\frac{x}{39-x} = \frac{20}{45}$; ур-ие перепишем так: $9x = 156 - 4x$, откуда $x = 12$; $39 - x = 27$.

По вышеприведенной формуле, $l^2 = bc - b_1c_1 = 20 \cdot 45 - 12 \cdot 27 = 576$; $l = 24$.

696. По формуле (см. зад. 695) $l_a^2 = bc - b_1c_1$, имеем:

$$24^2 = 20 \cdot 45 - b_1c_1, \text{ откуда } b_1c_1 = 20 \cdot 45 - 24^2 = 324.$$

Кроме того, по свойству биссектрисы, $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b}{c}$, или $\frac{b_1}{c_1} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$. Решив ур-ия $b_1c_1 = 324$ и $\frac{b_1}{c_1} = \frac{4}{9}$, получим:

$$b_1 = 12, \quad c_1 = 27.$$

697. Пусть $AB = 4x$, $BC = 5x$, $AC = 6x$.

Проведем биссектрису BD. Тогда отрезки $\frac{AD}{DC} = \frac{4}{5}$, т.-е. сторона $AC = 6x$ разделилась на части AD и DC, при чем $AD = \frac{4}{4+5} \cdot AC = \frac{4}{9} \cdot 6x = \frac{8}{3}x$, $DC = \frac{5}{4+5} \cdot AC = \frac{5}{9} \cdot 6x = \frac{10}{3}x$.

По формуле (зад. 695), $BD^2 = l^2 = bc - b_1c_1 = 4x \cdot 5x - \frac{8}{3}x \cdot \frac{10}{3}x = \frac{100}{9}x$; $l = \frac{10}{3}x$. Таким образом, $BD = DC$, а потому

$$\angle ACB = \angle DBC = {}^1/_2 \angle ABC.$$

698. Проведем биссектрису $AD = l$ угла A. Получившийся тр-к ABD равнобедренный, ибо $\angle ABD = {}^1/_2 \angle BAC = \angle BAD$. Следовательно, $AD = BD = l$. Кроме того имеем (зад. 695) $l^2 = bc - b_1c_1 = bc - b_1l$ и $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_1}{l}$.

Имеем ур-ия: $l^2 = bc - b_1l$ и $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{l}$; из второго ур-ия определяем $b_1 = l \cdot \frac{b}{c}$ и подставляем в первое, получаем: $l^2 = bc - l^2\frac{b}{c}$, или $l^2\left(1 + \frac{b}{c}\right) = bc$, откуда $l = c\sqrt{\frac{b}{b+c}}$. Искомая сторона $BC = BD + DC = c_1 + b_1 = l + l \cdot \frac{b}{c} = \frac{l(b+c)}{c} = c\sqrt{\frac{b}{b+c}} \cdot \frac{b+c}{c} = \sqrt{b(b+c)}$.

699. Пусть $AB = 80$ *м*, $CD = 24$ *м*.

Дополним сегмент до окружности и продолжим высоту до пересечения в точке K с окружностью.

По теореме: „перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра", напишем: $AD^2 = DC \cdot DK$, но $AD = \frac{a}{2}$, $DC = h$, $DK = 2R - h$. Перепишем равенство: $\frac{a^2}{4} = h(2R - h)$, откуда

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Проведем к касательной AE в точку касания радиус OA. В прямоугольном тр-ке OAE катет $OA = R$, $OD = R - h$, $AD = \frac{a}{2}$. Имеем $OA^2 = OE \cdot OD$ (зад. 533), откуда $OE = \frac{OA^2}{OD} = \frac{R^2}{R-h}$. Площадь прямоугольного тр-ка OAE равна либо $\frac{OA \cdot AE}{2} = \frac{R \cdot AE}{2}$, либо $\frac{OE \cdot AD}{2} = \frac{R^2 \cdot a}{2(R-h)2} = \frac{aR^2}{4(R-h)}$.

Следовательно, $\frac{R \cdot AE}{2} = \frac{aR^2}{4(R-h)}$, откуда $AE = \frac{aR}{2(R-h)}$.

Подставив в эту формулу значение $R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$, получим:

$$AE = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + 4h^2}{a^2 - 4h^2} = 85 \text{ м}.$$

700. Проведем радиус OK в точку K касания к касательной DC.

Касательная KC равна BC (зад. 158) $= a$.

Обозначим отрезок KD через x, тогда искомая $CD = KC + KD = a + x$.

1-й способ. Прямоугольные тр-ки OKD и BCD подобны, как имеющие общий острый угол D.

Из подобия тр-ков имеем:

$$\frac{OK}{BC} = \frac{OD}{CD};\ \text{но}\ OK = r,\ BC = a,\ OD = \sqrt{OK^2 + DK^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 + x^2};\ CD = a + x.$$

Пропорция перепишется так: $\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{a + x}$.

Возведем обе части ур-ия в квадрат: $\frac{r^2}{a^2} = \frac{r^2 + x^2}{a^2 + 2ax + x^2}$;

после преобразований, ур-ие перепишется так: $2ar^2 = x(a^2 - r^2)$,

$$\text{откуда}\ x = \frac{2ar^2}{a^2 - r^2}.$$

Искомая $CD = KC + KD = a + x = a + \frac{2ar^2}{a^2 - r^2} = \frac{a \cdot (a^2 + r^2)}{a^2 - r^2}$.

По подстановке числовых значений $a = 12$ *см*, $r = 4$ *см*, получим: $CD = 15$ *см*.

2-й способ. Площадь тр-ка BCD рассматриваем, как сумму площадей тр-ков BOC и DOC.

$$\text{Площадь тр-ка}\ BOC = \frac{BC \cdot BO}{2} = \frac{ar}{2};$$

$$\text{площадь тр-ка}\ DOC = \frac{CD \cdot OK}{2} = \frac{(a + x)r}{2}.$$

Сумма же этих площадей—равная площади тр-ка BCD — равна $\frac{ar}{2} + \frac{(a + x)r}{2} = \frac{r}{2}(2a + x)$.

С другой стороны, площадь тр-ка BCD равна:

$$\frac{BC \cdot BD}{2} = \frac{BC\sqrt{CD^2 - BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{(a + x)^2 - a^2}}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{x(2a + x)}.$$

Сравнивая оба выражения для площади тр-ка BCD, находим: $\frac{r}{2}(2a + x) = \frac{a}{2}\sqrt{x(2a + x)}$. Возведем обе части ур-ия в квадрат,

(предварительно сократив знаменателя): $r^2(2a + x)^2 = a^2x \quad 2a+x)$ Сократим на $(2a + x)$ обе части: $r^2(2a + x) = a^2x$.

Решив ур-ие, получим $x = \frac{2ar^2}{a^2 - r^2}$.

Искомая $CD = a + x = a + \frac{2ar^2}{a^2 - r^2} = a \cdot \frac{a^2 + r^2}{a^2 - r^2}$. По подстановке числовых значений $a = 12$ *см* и $r = 8$ *см*, получаем: $CD = 15$ *см*.

701. 1) Соединяя центр круга O с точками касания D и E на катетах AC и BC, получим квадрат $CDOE$, так как $OD = OE = r$; углы же ACB, ODC и OEC — прямые; следовательно, и 4-й угол DOE — прямой (зад. 81,—сумма углов всякого 4-угольника равна $4d$). $DC = EC$ (касательные, проведенные из одной точки,—зад. 158), а $EC = OD = r$ (отрезки параллельных между параллельными); следовательно, $DC = EC = r$.

Обозначим BC через a, AC через b и AB через c; тогда $a = BD + DC = BD + r$, $b = AE + EC = AE + r$. Из этих равенств следует: $BD = a - r$; $AE = b - r$. Но $BD = BF$, а $AE = AF$, как касательные, проведенные из одной точки (зад. 158). Следовательно, $BF = a - r$, $AF = b - r$. Сложив почленно оба последние равенства, получим: $BF + AF = a + b - 2r$; но $BF + AF = AB = c$; а потому $c = a + b - 2r$, откуда $r = \frac{a + b - c}{2}$.

2) Гипотенуза равна $\sqrt{40^2 + 42^2} = 58$ *см*. Радиус вписанного круга равен (см. п. 1) $\frac{40 + 42 - 58}{2} = 12$ *см*.

Радиус описанного круга равен половине гипотенузы, именно $^{58}/_{2} = 29$ *см*, ибо, описав окружность, увидим, что гипотенуза будет диаметром (прямой угол—вписанный—вмещает полуокружность).

702. Примечание. Центр описанного круга лежит на пересечении перпендикуляров, восставленных из середины сторон тр-ка. В тупоугольном тр-ке перпендикуляры пересекаются вне тр-ка, в остроугольном — внутри его, а в прямоугольном на середине гипотенузы. Следовательно, задача сводится к определению вида треугольника (см. зад. 425).

1) $10^2 > 5^2 + 8^2 (100 > 89)$, следовательно, тр-к тупоугольный. Центр круга лежит вне тр-ка.

2) $8^2 < 7^2 + 5^2 (64 < 74)$ — тр-к остроугольный. Центр круга лежит внутри тр-ка.

3) $325^2 = 80^2 + 315^2$ (105625 = 105625). Тр-к — прямоугольный; значит, гипотенуза служит диаметром, т.-е. центр круга лежит на стороне тр-ка.

703. Радиус r круга, вписанного в тр-к, определяется по формуле $S = pr$, где S — площадь тр-ка, p — полупериметр тр-ка, именно: $r = \frac{S}{p}$.

Радиус R круга, описанного около тр-ка, определяется из формулы $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны тр-ка, именно: $R = \frac{abc}{4S}$.

1) Площадь тр-ка определяем по формуле:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$;

значит, $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4;\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125.$$

2) Площадь тр-ка определяем по формуле (п. 1), где $p = \frac{15+13+4}{2} = 16$:

$$S = \sqrt{16(16-15)(16-13)(16-4)} = \sqrt{16 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 12} = 24.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = 1{,}5;\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{15 \cdot 13 \cdot 4}{4 \cdot 24} = 8{,}125.$$

3) Площадь тр-ка определяем по формуле (п. 1), где $p = \frac{35+29+8}{2} = 36$:

$$S = \sqrt{36(36-35)(36-29)(36-8)} = \sqrt{36 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 28} = 84.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{36} = 2\tfrac{1}{3};\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{35 \cdot 29 \cdot 8}{4 \cdot 24} = 24\tfrac{1}{6}.$$

4) Площадь тр-ка определяем по формуле (п. 1), где $p = \frac{4+5+7}{2} = 8$:

$$S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96}.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{96}}{8} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1{,}2\ldots;\ R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4\sqrt{96}} = \frac{35}{\sqrt{96}} = 3{,}5\ldots$$

704. Проведем диагонали AC и BD и высоту BE. Если опишем окружность около тр-ка ABD, то окружность пройдет и через вершину C. В самом деле.

В равнобедренной трапеции острые углы (а также тупые) равны между собою. Если бы точка C лежала внутри круга, то, продолжив сторону BC (параллельную AD) до пересечения с окружностью, соединяем точку пересечения с точкой D. Во вновь

образованной трапеции (равнобедренной, ибо вписанные трапеции — равнобедренные) острые углы равны; в точке D мы получили бы два „равных“ угла, из которых один является частью другого, что абсурдно. Так же докажем и невозможность для точки C положения вне окружности.

Радиус описанного круга определим по формуле $R = \frac{bc}{2h_a}$, где b и c суть стороны тр-ка, а h_a — высота на 3-ю сторону.

В тр-ке ABD сторона AB равна c, а BD определится, как одна из равных диагоналей трапеции, по Птоломеевой теореме, а $h_a = BE$ — из прямоугольного тр-ка ABE, где гипотенуза $AB = c$, а $AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Имеем: $ab + c \cdot c = x^2$ (считая $BD = AC = x$), откуда

$$BD = x = \sqrt{ab + c^2};$$

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{4}} = {}^1/_2 \sqrt{4c^2 - (a-b)^2}.$$

Искомый $R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{c\sqrt{ab + c^2}}{\sqrt{4c^2 - (a-b)^2}}$.

705. 1-й случай. Пусть $BC = a$. $AC = b$, и центр круга O лежит между ними. Проведем диаметр $CD = 2R$ и хорды AD и BD, которые определятся, как катеты, из прямоугольных тр-ков ACD и BCD, а именно:

$$AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{4R^2 - b^2};\ BD = \sqrt{CD^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

По Птоломеевой теореме, имеем: $BC \cdot AD + AC \cdot BD = AB \cdot CD$, или $a \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} + b \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} = AB \cdot 2R$, откуда искомая

$$AB = c_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

2-й случай. Центр круга O лежит вне сторон a и b. Проводим диаметр CD и хорды BD и AD. Формула (по Птоломеевой теореме) примет вид: $AC \cdot BD + AB \cdot CD = BC \cdot AD$, или

$$b \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} + AB \cdot 2R = a \cdot \sqrt{4R^2 - b^2}, \text{ откуда}$$

$$AB = c_2 = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}.$$

Подставив вместо a, b и R числовые значения 17, 10 и $10^5/_8$, получим: $c_1 = 21$, $c_2 = 9$.

706. Стороны подобных тр-ков относятся, как радиусы вписанных (или описанных) кругов.

Как видно из чертежа, радиус круга, описанного около данного тр-ка ABC, будет и радиусом круга, вписанного в тр-к $A_1B_1C_1$.

Определим радиус круга, описанного около тр-ка ABC со сторонами 10 *см*, 15 *см* и 20 *см*, по формуле: $R = \frac{abc}{4S}$. Площадь тр-ка S определим по формуле; $= S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+15+20}{2} = \frac{45}{2}$ *см*:

$$S = \sqrt{\frac{45}{2}\left(\frac{45}{2}-10\right)\left(\frac{45}{2}-15\right)\left(\frac{45}{2}-20\right)} = \sqrt{\frac{45}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{75}{4}\sqrt{15}.$$

Значит, $R = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 20}{75\sqrt{15}} = \frac{40}{\sqrt{15}}$. Это и есть значение радиуса круга, вписанного в тр-к $A_1B_1C_1$.

Радиус круга, вписанного в тр-к ABC, определим из формулы $S = pr$, откуда $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь тр-ка, равная $\frac{75}{4}\sqrt{10}$ (вычислено выше), а $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+15+20}{2} = \frac{45}{2}$ *см*. Следовательно, $r = \frac{S}{p} = \frac{75}{4}\sqrt{15} : \frac{45}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{15}$.

Если стороны $BC = 10$ *см*, $AC = 15$ *см* и $AB = 20$ *см*, то имеем пропорции: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{R}{r}$; $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{R}{r}$; $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{R}{r}$; подставив числовые значения BC, AC и AB, а вместо отношения $\frac{R}{r}$ его выражение: $\frac{40}{\sqrt{15}} : \frac{5}{6}\sqrt{15} = \frac{16}{5}$, получим: $B_1C_1 = BC \cdot \frac{R}{r} = \frac{10 \cdot 16}{5} = 32$ *см*; $A_1C_1 = AC \cdot \frac{R}{r} = 15 \cdot \frac{16}{5} = 48$ *см*; $A_1B_1 = AB \cdot \frac{R}{r} = 20 \cdot \frac{16}{5} = 64$ *см*.

707. Так как $AM = AK$, $BM = BL$, $CK = OL = r$, $CL = OK = r$, то, обозначив отрезок $AM = m$, $BM = n$, имеем: $AC = AK + KC = m + r$. $BC = BL + CL = n + r$, $AB = AM + BM = m + n$. Периметр тр-ка $AC + BC + AB = m + r + n + r + m + n = 2(m + n + r) = 2p$, откуда $m + n + r = p$.

По Пифагоровой теореме, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, или $(m+n)^2 = (m+r)^2 + (n+r)^2$. Раскрывши скобки, приведем равенство к виду: $mn = r(m + n + r) = pr$. Но pr есть выражение для площади тр-ка; значит, и mn равна площади тр-ка ABC.

708. Пусть $AL = AK = \alpha$, $BL = BM = \beta$, $CK = CM = \gamma$.

По формуле, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Так как периметр тр-ка равен $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ $(AK + AL + BL + BM + CK + CM)$, то

полупериметр $p = \alpha + \beta + \gamma$; $p - a = \alpha + \beta + \gamma - BC = \alpha + \beta + \gamma - (\beta + \gamma) = \alpha$; $p - b = \alpha + \beta + \gamma - AC = \alpha + \beta + \gamma - (\alpha + \gamma) = \beta$; $p - c = \alpha + \beta + \gamma - AB = \alpha + \beta + \gamma - (\alpha + \beta) = \gamma$.

Следовательно, формула перепишется так:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}.$$

709. Пусть в тр-ке ABC стороны $AB = 13x$, $AC = 14x$, $BC = 15x$. Проведем $MN \parallel AC$ и радиус OK в точку K касания стороны AC. Пусть высота $BD = H$, радиус вписанного круга — r.

Тр-ки ABC и MBN подобны; высота

$$BL = BD - LD = BD - OK = H - r.$$

Площади подобных тр-ков пропорциональны квадратам сходственных высот; следовательно, $\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } MBN} = \frac{H^2}{(H-r)^2}$; составив производную пропорцию: $\frac{\text{пл. } ABC - \text{пл. } MBN}{\text{пл. } MBN} = \frac{H^2 - (H-r)^2}{(H-r)^2}$ и заметив, что пл. ABC — пл. MBN = пл. $AMNC$, перепишем:

$$\frac{\text{пл. } AMNC}{\text{пл. } MBN} = \frac{2Hr - r^2}{(H-r)^2}.$$

Задача сводится к определению величин H и r. Радиус r вписанного круга определим из формулы $S = pr$ (где $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, а $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13x+14x+15x}{2} = 21x$),

$$\text{откуда } r = \frac{S}{p}.$$

Имеем: $S = \sqrt{21x(21x-13x)(21x-14x)(21x-15x)} =$

$= \sqrt{21x \cdot 8x \cdot 7x \cdot 6x} = 84x^2$. Значит, $r = \frac{S}{p} = \frac{84x^2}{21x} = 4x$.

Величину H найдем из равенства $\frac{AC \cdot BD}{2} = S$, или $\frac{14x \cdot H}{2} = 84x^2$, откуда $H = 12x$.

Итак, $\frac{\text{пл. } AMNC}{\text{пл. } MBN} = \frac{2Hr - r^2}{(H-r)^2} = \frac{r(2H-r)}{(H-r)^2} = \frac{4x(2 \cdot 12x - 4x)}{(12x-4x)^2} = \frac{5}{4}$ (или, считая от вершины B, пл. MBN : пл. $AMNC = {}^4/_5$).

710. Биссектриса угла B одновременно является и биссектрисой угла B_1. В самом деле. Продолжив A_1B_1 и B_1C_1, мы получаем ромб BKB_1L, так как в этом параллелограме высоты (по условию) равны. Значит, биссектриса BB_1 разделит угол KB_1L, а потому и $\angle A_1B_1C_1$, пополам, т. е. является и его биссектрисой.

Подобным образом и биссектрисы углов A и C будут биссектрисами углов A_1 и C_1. Следовательно, и центры кругов, вписанных в тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$, совпадают.

Искомое расстояние $MN = OM - ON = r_1 - r_2$ (обозначая через r_1 и r_2 радиусы кругов, вписанных в тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$).

Радиус r_1 круга вписанного в тр-к ABC, определяется из формулы $S_1 = p_1 r_1$, откуда $r_1 = \frac{S_1}{p_1}$, где $S_1 = \sqrt{p_1(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)}$,

при чем $p_1 = \frac{13+37+40}{2} = 45\ см$;

$$S_1 = \sqrt{45(45-13)(45-37)(45-40)} = \sqrt{45 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 5} = 240\ см^2;$$

$$r_1 = \frac{S_1}{p_1} = \frac{240}{45} = \frac{16}{3}\ см.$$

Так же определится и радиус круга, вписанного в тр-к $A_1B_1C_1$, $r_2 = \frac{S_2}{p_2}$. Площадь $S_2 = \frac{1}{16} S_1 = {}^1/_{16} \cdot 240 = 15\ см^2$. Периметр p_2 находится на основании теоремы: площади подобных тр-ков пропорциональны квадратам периметров (или полупериметров). Имеем:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2},\ \text{или}\ \frac{16}{1} = \frac{45^2}{p_2^2},\ \text{откуда}\ p_2 = \frac{45}{4}.$$

$$\text{Итак,}\ r_2 = \frac{S_2}{p_2} = 15 : \frac{45}{4} = \frac{4}{3}\ см.$$

Искомое расстояние $r_1 - r_2 = {}^{16}/_3 - {}^4/_3 = 4\ см$.

711. Пусть $BC = a = 25$, $AC = b = 30$. Проведем биссектрису BD. В тр-ке ABD углы BAD и ABD равны, ибо, по условию, $\angle B = 2\angle A$; следовательно, $AD = BD = m$, $DC = AC - AD = b - m = 30 - m$.

Тр-ки ABC и BDC подобны, ибо $\angle C$ у них общий, а $\angle BDC$, как внешний, равен $\angle A + \angle ABD = \angle A + {}^1/_2 \angle B = \angle B$. Из подобия их имеем: $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$, или $\frac{25}{30-m} = \frac{30}{25}$; последнее ур-ие перепишем так: $30 - m = {}^{125}/_6$, откуда $m = {}^{55}/_6$. Следовательно, $AD = m = {}^{55}/_6$; $DC = {}^{125}/_6$.

На основании свойства биссектрисы, напишем: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, или $AB : 25 = {}^{55}/_6 : {}^{125}/_6$, откуда $AB = c = 11$. Радиус круга, вписанного в тр-к, найдем по формуле $r = \frac{S}{p}$ (на основании равенства $S = pr$), а радиус круга, описанного около тр-ка — по формуле $R = \frac{abc}{4S}$.

Площадь S тр-ка найдем по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{25+30+11}{2} = 33$; $S = \sqrt{33(33-25)(33-30)(33-11)} = \sqrt{33 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 22} = 132$.

Итак, $r = \frac{S}{p} = \frac{132}{33} = 4$; $R = \frac{abc}{4S} = \frac{25 \cdot 30 \cdot 11}{4 \cdot 132} = 15{,}625$.

Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей.

В этом отделе для приближенного вычисления взято $\pi = 3{,}14$ и $\frac{1}{\pi} = 0{,}32$.

712. По формуле, $C = 2\pi R$.

1) $C = 2\pi \cdot 10 = 2 \cdot 3.14 \cdot 10 = 62{,}8$ *см*.

2) $C = 2\pi \cdot 15 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ *м*.

3) $C = 2\pi \cdot 35 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 35 = 219{,}8$ *см*.

713. Из равенства $C = 2\pi R$ имеем: $R = \frac{C}{2\pi}$.

1) $R = \frac{1}{2\pi}$ *м* $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$ *м* $= \frac{1}{2} \cdot 0{,}32$ *м* $= 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}32$ *см* $= 16$ *см*.

2) $R = \frac{25}{2\pi} = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{25}{2} \cdot 0{,}32 = 4$ *см*.

3) $R = \frac{4{,}75}{2\pi} = \frac{4{,}75}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{4.75}{2} \cdot 0{,}32 = 0{,}76$ *см*.

714. 1) Длина окружности равна $2\pi r$ и содержит 360°; следовательно, 45° соответствует дуге, равной $\frac{45}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{4}$.

2) Как и в п. 1. Дуга равна $\frac{24°30'}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{24{,}5}{360} \cdot 2\pi r = \frac{49}{360} \pi r$.

3) Как и в п. 1. Дуга равна

$$\frac{5°14'15''}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{5 \cdot 60 \cdot 60 + 14 \cdot 60 + 15}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 2\pi r = \frac{419\pi r}{14400}.$$

715. 1) Имеем пропорцию:

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{135°}{360°}, \text{ откуда } R = \frac{360l}{2\pi \cdot 135} = \frac{4l}{3\pi}.$$

2) Имеем пропорцию:

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{10°40'}{360°}, \text{ откуда } R = \frac{360° \cdot l}{2\pi \cdot 10°40'} = \frac{180 \cdot 60l}{\pi(10 \cdot 60 + 40)} = \frac{35l}{8\pi}.$$

3) Имеем пропорцию: $\frac{l}{2\pi R} = \frac{210°50''}{360°}$, откуда

$R = \frac{360°l}{2\pi . 210°50''}$, или $R = \frac{180 . 60 . 60 . l}{\pi(210 . 60 . 60 + 50)} = \frac{2160\,l}{15121\pi}$.

716. Из пропорции $\frac{l}{2\pi r} = \frac{x°}{360°}$, находим $x = \frac{360°l}{2\pi r} = \frac{180°l}{\pi r}$.

1) $x = \frac{180°l}{\pi r} = \frac{180°.45}{\pi . 10} = \left(\frac{810}{\pi}\right)°$.

2) $x = \frac{180°l}{\pi r} = \frac{180°.6}{\pi . 15} = \left(\frac{72}{\pi}\right)°$.

717. Из пропорции $\frac{l}{2\pi R} = \frac{x°}{360°}$, получаем: $x = \frac{180°l}{\pi R}$ и подставим R вместо l и 0,31831 вместо $\frac{1}{\pi}$.

Имеем $x = \frac{180°R}{R} . 0{,}31831 = 180° . 0{,}31831 = 57°17'$.

Примечание. Угол, соответствующий дуге, равной радиусу, называется радианом.

718. 1) Дуга, равная 60°, составляет $^1/_6$ окружности; следовательно, хорда, стягивающая эту дугу, есть сторона правильного вписанного 6-угольника, равная радиусу. Итак, $r = a$, а дуга равна $\frac{2\pi R}{6} = \frac{2\pi a}{6} = \frac{\pi a}{3}$.

2) Дуга, равная 90°, составляет $^1/_4$ окружности; а хорда, стягивающая эту дугу, есть сторона квадрата и равна $R\sqrt{2}$. Следовательно, $R\sqrt{2} = a$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Искомая длина дуги есть $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{2.2} = \frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$.

3) Дуга, равная 120°, составляет $^1/_3$ окружности, следовательно, хорда, стягивающая эту дугу. есть сторона правильного вписанного тр-ка и равна $R\sqrt{3}$. Следовательно, $R\sqrt{3} = a$, откуда $R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Искомая длина дуги равна $\frac{2\pi R}{3} = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3.3} = \frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$.

719. 1) Дуга в 60° составляет $^1/_6$ окружности, т.-е. $\frac{2\pi R}{6}$, или $\frac{\pi R}{3}$; значит, $\frac{\pi R}{3} = l$, откуда $R = \frac{3l}{\pi}$. Хорда же, стягивающая $^1/_6$ окружности, есть сторона правильного вписанного 6-угольника и равна R. Следовательно, искомая хорда равна тоже $\frac{3l}{\pi}$.

2) Дуга в 90° составляет $^1/_4$ окружности, т.-е. $\frac{2\pi R}{4}$, или $\frac{\pi R}{2}$; значит, $\frac{\pi R}{2} = l$, откуда $R = \frac{2l}{\pi}$. Хорда же, стягивающая дугу в 90°, есть сторона вписанного квадрата и равна $R\sqrt{2}$; а потому искомая хорда $R\sqrt{2} = 2l\sqrt{2}$.

3) Дуга в 120° составляет $\frac{1}{3}$ окружности, т.-е. $\frac{2\pi R}{3}$; значит, $\frac{2\pi R}{3} = l$, откуда $R = \frac{3l}{2\pi}$. Хорда же, стягивающая дугу в $\frac{1}{3}$ окружности, равна стороне правильного вписанного тр-ка и равна $R\sqrt{3}$; а потому искомая хорда $R\sqrt{3} = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

720. Составим ур-ие: $2\pi R - 2R = 107$ *см*. Отсюда $2R(\pi - 1) = 107$ *см*; $R = \frac{107}{2(\pi - 1)} = \frac{107}{2(3\,14 - 1)} = \frac{107}{2\,.\,2{,}14} = 25$ *см*.

721. Длина окружности $2\pi R$. Если в формулу вместо R подставим $R + m$, получим $2\pi(R + m)$. Увеличение произойдет на

$$2\pi(R + m) - 2\pi R = 2\pi m.$$

722. Из формулы $C = 2\pi R$ определяем $R = \frac{C}{2\pi}$.

Внешняя окружность — 167 *см*, следовательно, радиус $R = \frac{167}{2\pi}$; радиус внутренней окружности $r = \frac{117}{2\pi}$.

Искомая ширина кольца:

$$R - r = \frac{167}{2\pi} - \frac{117}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi} = 25 \cdot \frac{1}{\pi} = 25\,.\,0{,}32 = 8\ см.$$

723. Длина окружности $2\pi R$; сторона правильного вписанного 6-угольника равна R, периметр — $6R$.

Имеем: $2\pi R - 6R = 7$ *см* или $2R(\pi - 3) = 7$, откуда $2R = \frac{7}{\pi - 3}$; искомая длина окружности

$$2\pi R = \pi\,.\,\frac{7}{\pi - 3} = \frac{3{,}14\,.\,7}{3{,}14 - 3} = \frac{3{,}14\,.\,7}{0{,}14} = 158\ см.$$

724. Соединив концы хорды A и B с центром O и с точкой касания D, получим ромб $AOBD$, ибо $AO = OB = r$, а $AD = BD = a_6 = r$.

Радиус вписанной в сегмент окружности равен $\frac{CD}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r}{4}$, а искомая длина окружности — $2\pi \cdot \frac{r}{4} = \frac{\pi r}{2}$.

Определим r. Длина дуги в 120° составляет $^1/_3$ длины окружности, т.-е. $\frac{2\pi r}{3}$. Имеем: $\frac{2\pi r}{3} = l$, откуда $r = \frac{3l}{2\pi}$.

Искомая длина окружности, вписанной в сегмент, равна

$$\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3l}{2\pi} = \frac{3}{4} l.$$

725. Пусть длина прямой $= a$, и разделена на n частей; каждая из этих частей равна $\frac{a}{n}$. Длина полуокружности равна πr; подставив $\frac{a}{2n}$ вместо r, получим длину одной малой полуокружности $\frac{\pi a}{2n}$, а для n полуокружностей $\frac{\pi a}{2n} \cdot n = \frac{\pi a}{2}$.

Длина же полуокружности, радиус которой $\frac{a}{2}$, тоже равна $\frac{\pi a}{2}$.

726. Описанный угол ADB равен $\frac{240° - 120°}{2} = 60°$, так как одна из двух дуг, заключенных между его сторонами, равна $360° - 120° = 240°$, а 2-я дуга—данная—120°. Тр-к ADB равнобедренный, а так как $\angle D = 60°$, то—и равносторонний со стороной $AB = R\sqrt{3}$ (принимая радиус окружности O равным R).

Четыреугольник $AOBC$ — ромб, так как $AO = BO = R$, а $AC = BC = a_6 = R$. В ромбе диагонали взаимно делятся пополам, следовательно, $KC = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$.

Высота KD равностороннего тр-ка ABD равна

$$\frac{AB}{2}\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} R.$$

Следовательно, высота DC равностороннего тр-ка MDN равна

$$KD - KC = \frac{3}{2} R - \frac{R}{2} = R.$$

Так как высота равностороннего тр-ка равна утроенному радиусу вписанного круга, то, обозначая радиус круга O_1 через r, имеем $CD = R = 3r$, откуда $r = \frac{R}{3}$, а длина окружности O_1 равна $2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$.

Но $\frac{2\pi R}{3}$ есть и величина дуги ACB в 120°, т.-е. $\frac{1}{3}$ окружности.

727. Пусть радиус квадранта — R.

Соединим концы диаметра CD с точкой касания E. Угол CED прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр. Следовательно, 4-угольник $OCED$ имеет, очевидно, все прямые углы; $CE = ED$ и $CE = OD$, значит, равны и все 4 стороны, т.-е. это квадрат. В квадрате диагонали равны и делятся пополам: значит, $CD = OE = R$, т.-е. диаметр вписанного круга равен R, а радиус $\frac{R}{2}$. Длина полуокружности равна $\frac{\pi R}{2}$.

Длина дуги квадранта равна $\frac{1}{4}$ окружности: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{2}$.

Итак, дуга квадранта равновелика вписанной в него полуокружности.

728. Опишем из точек O и O_1, как из центров, дуги радиусами OC и O_1C. Пусть $\angle KOL = \alpha$.

Дуга MCN, описанная радиусом OC, равна $\frac{2\pi . OC . \alpha}{360}$. Дуга KCL, описанная радиусом $O_1C = \frac{OC}{2}$, равна $\frac{2\pi . OC . 2\alpha}{360 . 2} = \frac{2\pi . OC . \alpha}{360}$.

Итак, дуги равновелики.

729. Длина полуокружности $\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r = 3{,}141 \ldots r$.

Длина $a_3 = r\sqrt{3} = 1{,}732 \ldots r$, $a_4 = r\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots r$; $a_3 + a_4 = 3{,}146 \ldots r$. Степень точности — 0,01 при 2 десятичных знаках.

730. Если катеты равны $^6/_5 . 2R$ и $^3/_5 . 2R$, то гипотенуза равна

$$2R\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2R}{5}\sqrt{45} = \frac{2R}{5} \cdot 6{,}70828 \ldots$$

Периметр такого тр-ка равен: $\frac{6}{5} \cdot 2R + \frac{3}{5} \cdot 2R + \frac{2R}{5} \cdot 6{,}708\ldots =$

$= \frac{2R}{5}(6 + 3 + 6{,}70828 \ldots) = 3{,}14164 \ldots$ диаметров; окружность же составляет 3,14159... диаметров.

731. Площадь K круга равна πR^2.

1) $K = \pi R^2 = 3{,}14 . 10^2 = 314$ *см*^{2}.

2) $K = \pi R^2 = 3{,}14 . 4^2 = 3{,}14 . 16 = 50{,}24$ *м*^{2}.

3) $K = \pi R^2 = 3{,}14 . 2{,}5^2 = 3{,}14 . 6{,}25 = 19{,}625$ *см*^{2}.

732. Из равенства $K=\pi R^2$ определяем $R=\sqrt{\frac{K}{\pi}}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot K}$.

1) $R=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot K}=\sqrt{0{,}32\,.\,2}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$ *см*.

2) $R=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot K}=\sqrt{0{,}32\,.\,50}=4$ *м*.

3) $R=\sqrt{\frac{1}{\pi}\cdot K}=\sqrt{0{,}32\,.\,17}=2{,}3\ldots$ *см*.

733. 1) Из формулы $C=2\pi R$ определим радиус R через длину окружности: $R=\frac{C}{2\pi}=\frac{8}{2\pi}=\frac{4}{\pi}$ *см*.

Искомая площадь круга

$$K=\pi R^2=\pi\,.\left(\frac{4}{\pi}\right)^2=16\,.\,\frac{1}{\pi}=16\,.\,0{,}32=5{,}12\ см^2.$$

2) Из формулы $K=\pi R^2$ определим радиус круга R через площадь круга: $R=\sqrt{\frac{K}{\pi}}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\,.\,K}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\,.\,18}$ *см*.

Искомая длина окружности $2\pi R=2\pi\,.\sqrt{\frac{1}{\pi}\,.\,18}=2\,.\sqrt{\pi\,.\,18}=$

$=6\sqrt{3{,}14\,.\,2}=15{,}072$ *см*.

734. Пусть радиус круга R; тогда сторона вписанного квадрата равна $R\sqrt{2}$, а его площадь $(R\sqrt{2})^2=2R^2=F$. Отсюда $R^2=\frac{F}{2}$; $\left(R=\sqrt{\frac{F}{2}}\right)$.

Искомая площадь круга $K=\pi R^2=\pi\cdot\frac{F}{2}$.

Примечание. Из этого примера видно, что взятое в скобки выражение $R=\sqrt{\frac{F}{2}}$ для решения задачи излишне, что всегда желательно предусматривать.

735. Диаметр круга равен стороне описанного квадрата.

Пусть радиус круга R; тогда сторона описанного квадрата—$2R$.

Площадь квадрата — $(2R)^2=4R^2$, площадь круга—πR^2. По условию, $4R^2-\pi R^2=4{,}3$ *м*^{2}, или $R^2(4-\pi)=4{,}3$ *м*^{2}, откуда

$$R^2=\frac{4{,}3}{4-\pi}=\frac{4{,}3}{4-3{,}14}=\frac{4{,}3}{0{,}86}\ м^2.$$

Искомая площадь круга $\pi R^2=3{,}14\,.\,\frac{4.3}{0{,}86}=15{,}7$ *м*^{2}.

736. Отношение площадей кругов равно отношению квадратов их радиусов (или квадрату отношения радиусов). Для правильных многоугольников,—отношение площадей кругов, вписанного к описанному равно отношению квадратов апофемы и радиуса.

1) Отношение апофемы OD правильного 3-угольника к его радиусу OC равно 1 : 2 (радиус круга описанного вдвое больше радиуса вписанного в него круга).

Искомое отношение — $1^2 : 2^2$, или 1 : 4.

2) Радиус описанного около квадрата круга OA_1 равен $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (из формулы $a = r\sqrt{2}$); радиус вписанного в квадрат круга OA равен $\frac{a}{2}$ (диаметр вписанного круга равен стороне квадрата).

Искомое отношение — $\left(\frac{a}{2}\right)^2 : \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 1 : 2$.

3) Апофема OC правильного 6-угольника найдется, как высота равностороннего тр-ка $AOB(AO = OB = r,\ AB = a_6 = r)$: $OC = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Искомое отношение — $\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 : r^2 = 3 : 4$.

737. Площадь круга равна πR^2.

1) Площадь вписанного в круг квадрата (сторона квадрата $a = R\sqrt{2}$) равна $a^2 = 2R^2$.

Отношение площади квадрата к площади круга:

$$2R^2 : \pi R^2 = \frac{2}{\pi} = 2 \cdot \frac{1}{\pi} = 2\,0{,}32 = 0{,}64 = {}^{7}/_{11} \text{ (прибл.)}.$$

2) Сторона правильного 12-угольника равна $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (зад. 530), апофема его — $\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, площадь

$$\frac{12a_{12}k_{12}}{2} = 6 \cdot r\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = 3r^2.$$

Искомое отношение площади правильного вписанного 12-угольника к площади круга:

$$3r^2 : \pi r^2 = \frac{3}{\pi} = 3 \cdot \frac{1}{\pi} = 3 \cdot 0{,}32 = \frac{21}{22} \text{ (прибл.)}.$$

Примечание. Можно воспользоваться и зад. 641.

738. Пусть радиус большей полуокружности R, меньшей r. Проведем радиус OC большей полуокружности и радиус OE — меньшей.

Из прямоугольного тр-ка OEC, где $CE = OE = r$, а $OC = R$, найдем:

$$OC^2 = OE^2 + CE^2, \text{ или } R^2 = r^2 + r^2, \text{ откуда } r^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Отношение площадей полуокружностей равно отношению квадратов их радиусов: $r^2 : R^2$, или $\frac{R^2}{2} : R^2 = 1 : 2$.

739. 1) Площадь кольца равна разности площадей большей окружности и меньшей.

Площадь большей окружности равна $\pi \cdot 8^2$ *см*^{2}, меньшей — $\pi \cdot 7^2$ *см*^{2}.

Искомая площадь кольца равна $\pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 7^2 = \pi(8^2 - 7^2) = 15\pi$ *см*^{2} $= 15 \cdot 3{,}14 = 47{,}1$ *см*^{2}.

2) Пусть радиус большей окружности R, меньшей — r. Площадь кольца равна разности площадей большей окружности и меньшей: $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Проведем радиусы OA и OC. Из прямоугольного тр-ка AOC, где $AC = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$, имеем: $OA^2 - OC^2 = AC^2$, или $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$.

Следовательно, искомая площадь кольца равна $\pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi a^2}{4}$.

3) Геометрическое место точек конца B касательной, перемещающейся благодаря скольжению точки A по окружности, есть тоже окружность (показана пунктиром), радиус которой OB есть гипотенуза прямоугольного тр-ка с катетами $AB = a$ и $OA = R$ — радиусу круга; значит, $OB^2 = OA^2 + AB^2 = R^2 + a^2$.

Площадь, которую описывает касательная AB, есть кольцо между внешней и внутренней окружностями, площадь которого равна разности площадей этих кругов: $\pi(R^2 + a^2) - \pi R^2 = \pi a^2$.

740. Пусть искомая ширина кольца (заштриховано) — x; радиус данных кругов — r.

Площадь кольца равна разности площадей круга радиуса $OA (= 3r + x)$ и круга радиуса $OB (= 3r)$. По условию, $\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OB^2 = 7\pi OC^2$, или $\pi(3r + x)^2 - \pi(3r)^2 = 7\pi r^2$. Перепишем ур-ие: $x^2 + 6rx - 7r^2 = 0$.

Решив ур-ие, получим: $x = -3r \pm \sqrt{9r^2 + 7r^2} = -3r \pm 4r$.

Берем положительный корень $x = r$.

741. Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса: $S = \frac{lr}{2}$.

1) Определим длину дуги: $l = \frac{2\pi r \cdot 67°30'}{360°} = \frac{\pi \cdot r \cdot 67{,}5}{180} = \frac{3}{8}\pi r$. Искомая площадь $S = \frac{lr}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}\pi r \cdot r = \frac{3}{16}\pi r^2$.

2) Определим длину дуги: $l = \frac{2\pi r \cdot 15°45'}{360°} = \frac{\pi r \cdot 15{,}75}{180} = \frac{7}{80}\pi r$. Искомая площадь $S = \frac{lr}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{80}\pi r \cdot r = \frac{7}{160}\pi r^2$.

3) Определим длину дуги: $l = \frac{2\pi r \cdot 200°40''}{360°} = \frac{\pi r \cdot 720040''}{360 \cdot 60 \cdot 60''}$. Искомая площадь $S = \frac{lr}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r \cdot 720040}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot r = \frac{18001}{32400}\pi r^2$.

742. Пусть радиус сектора — r, центральный угол — α; тогда длина дуги его $l = \frac{\pi r \alpha}{180}$; площадь его — q. Зависимость между этими величинами такая:

$q = \frac{lr}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r \alpha}{180} \cdot r = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$; отсюда $r = \sqrt{\frac{360q}{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{\alpha} \cdot q}$.

1) По формуле:

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{\alpha} \cdot q} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360}{72} \cdot q} = \sqrt{\frac{5q}{\pi}}.$$

2) По формуле:

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{\alpha} \cdot q} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{36'} \cdot q} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360 \cdot 60}{36} \cdot q} = \sqrt{\frac{600q}{\pi}}.$$

3) По формуле: $r = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{\alpha} \cdot q} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360°}{40'50''} \cdot q} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{40 \cdot 60 + 50} \cdot q} = \sqrt{\frac{25920\,q}{49\pi}}.$$

743. Из равенства (зад. 742): $q = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$ определяем $\alpha = \frac{360°q}{\pi r^2}$.

744. Площадь квадрата, вписанного в круг радиуса r, равна $a^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$.

Площадь сектора равна (зад. 742): $\frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.

Следовательно, $2r^2 = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$, откуда

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \,.\, 360^\circ = 0{,}318 \,.\, 720^\circ = 229^\circ.$$

745. По формуле (зад. 742), площадь сектора $q = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$. Площадь сегмента равна площади сектора, уменьшенной на площадь соответственного тр-ка.

1) $q = \frac{\pi r^2 \,.\, 120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$; площадь тр-ка AOB равна $\frac{AB \,.\, OC}{2}$; но $AB = a_3 = r\sqrt{3}$, $OC = \frac{r}{2}$ (зад. 67); следовательно, площадь тр-ка $AOB = \frac{r\sqrt{3} \,.\, r}{2 \,.\, 2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Искомая площадь сегмента равна

$$\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

2) $q = \pi r^2 \,.\, \frac{90}{360} = \frac{\pi r^2}{4}$; площадь тр-ка равна $\frac{r^2}{2}$, так как в равнобедренном прямоугольном тр-ке AOB катеты $OA = OB = r$. Искомая площадь сегмента равна $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$.

3) $q = \pi r \,.\, \frac{60}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$; площадь тр-ка (равностороннего) AOB равна $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Искомая площадь сегмента равна

$$\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

4) $q = \pi r^2 \,.\, \frac{45}{360} = \frac{\pi r^2}{8}$; площадь тр-ка $AOB = \frac{OB \,.\, AC}{2}$; но $OB = r$, а AC определится из равнобедренного ($\angle AOC = 45^\circ$) прямоугольного тр-ка AOC, у которого гипотенуза $AO = r$; $AC = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; следовательно, площадь тр-ка $AOB = \frac{OB \,.\, AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \,.\, \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2}{4}\sqrt{2}$. Искомая площадь сегмента: $\frac{\pi r^2}{8} - \frac{r^2}{4}\sqrt{2} = \frac{r^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2})$.

5) $q = \pi r^2 \,.\, \frac{30}{360} = \frac{\pi r^2}{12}$; площадь тр-ка AOB равна $\frac{OB \,.\, AC}{2}$; но $OB = r$, а AC определится, как катет прямоугольного тр-ка AOC

(с $\angle A = 30°$): $AC = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$; следовательно, площадь тр-ка $AOB =$

$= \frac{OB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{4}$. Искомая площадь сегмента равна:

$$\frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{12}(\pi - 3).$$

6) $q = \frac{\pi r^2 \cdot 36}{360} = \frac{\pi r^2}{10}$; площадь тр-ка $AOB = \frac{AB \cdot OC}{2}$; но

$AB = a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$; $OC = k_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ (зад. 531_3).

Следовательно, площадь тр-ка $AOB =$

$$= \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

(тот же результат получим, взяв $^1/_{10}$ площади 10-угольника, — зад. 645_1). Искомая площадь сегмента:

$$\frac{\pi r^2}{10} - \frac{r^2}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{r^2}{40}(4\pi - 5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}).$$

746. Примечание. Чертежи для всех 6 случаев см. зад. 745.

Площадь сегмента равна площади сектора без площади соответственного тр-ка.

1) Площадь сектора равна $\pi r^2 \cdot \frac{120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$. Площадь тр-ка AOB равна $^1/_3$ площади правильного вписанного тр-ка:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}.$$

Искомая площадь сегмента: $\frac{\pi r^2}{3} - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3}$ (1). Радиус круга r определится из равенства $a = r\sqrt{3}$ (так как $AB = a_3$ — стороне правильного вписанного тр-ка), откуда $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Результат (1) перепишется так: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{3} - \frac{1}{12}a^2\sqrt{3} = \frac{a^2}{36}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Этот же результат получим, воспользовавшись решением зад. 745 и подставив $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ вместо r.

2) По зад. 745_2, искомая площадь сегмента равна: $S = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$. Величину r^2 определим из прямоугольного тр-ка AOB, где $AO = OB = r$,

именно $2r^2 = a^2$, откуда $r^2 = \frac{a^2}{2}$. Подставив $\frac{a^2}{2}$ вместо r^2, получим: $S = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$.

3) Результат тот же, что и в зад. 745_3, только подставляем a вместо r, (так как $a = r$): $S = \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

4) По зад. 745_4, искомая площадь сегмента равна:

$$\frac{r^2}{8}(\pi - 2\sqrt{2}) \quad (1).$$

Величину r^2 определим из прямоугольного тр-ка ABC, в котором катет $AC = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ (зад. 745_4), а катет $BC = OB - OC = OB - AC = r - \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2})$. Итак,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$, или $a^2 = \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4}(2 - \sqrt{2})^2$. Отсюда

$$r^2 = \frac{4a^2}{8 - 4\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a^2(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{a^2}{2}(2 + \sqrt{2}).$$

Подставив в выражение (1) значение r^2, получим:

$$\frac{a^2}{16}(2 + \sqrt{2})(\pi - 2\sqrt{2}).$$

5) По зад. 745_5, искомая площадь сегмента равна: $\frac{r^2}{12}(\pi - 3)$ (1).

Величину r^2 определим из прямоугольного тр-ка ABC, в котором катет $AC = \frac{r}{2}$ (зад. 745_5), а катет $BC = OB - OC = r - \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (из тр-ка AOC, в котором $\angle O = 30°$, следует—зад. 67—

$$OC = \frac{AO}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}) = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

Итак, $AB^2 = AC^2 + BC^2$, или $a^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2$.

Отсюда $r^2 = \frac{4a^2}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{a^2}{2 - \sqrt{3}} = \frac{a^2(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = a^2(2 + \sqrt{3})$.

В результат (1) подставляем значение r^2; получаем:

$$\frac{a^2}{12}(2 + \sqrt{3})(\pi - 3).$$

6) По зад. 745_6, искомая площадь сегмента равна:

$$\frac{r^2}{40}(4\pi - 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}) \quad (1).$$

Радиус r определяем из формулы для стороны правильного вписанного 10-угольника: $a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, откуда

$$r = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{2a(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2a(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1), \text{ или}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2 = \frac{a^2}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Подставим значение r^2, получаем:

$$\frac{a^2}{80}(3+\sqrt{5})(4\pi - 5\sqrt{10-2\sqrt{5}}).$$

747. Площадь сегмента равна площади сектора без площади соответственного тр-ка.

1) Площадь сектора равна $\pi r^2 \cdot \frac{135}{360} = \frac{3}{8}\pi r^2$.

Площадь тр-ка $AOB = \frac{OB \cdot AC}{2}$; но $OB = r$, а AC определится из прямоугольного тр-ка AOC, в котором $AO = r$, $\angle AOC = 180° - 135° = 45°$; следовательно, тр-к AOC — равнобедренный, и $OC = AC = x$. Итак, $OC^2 + AC^2 = OA^2$, или $x^2 + x^2 = r^2$, откуда $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, площадь тр-ка $AOB =$

$$= \frac{OB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2}{4}\sqrt{2}.$$

Искомая площадь сегмента: $\frac{3}{8}\pi r^2 - \frac{r^2}{4}\sqrt{2} = \frac{r^2}{8}(3\pi - 2\sqrt{2})$.

2) Площадь сектора равна $\pi r \cdot \frac{150}{360} = \frac{5}{12} \cdot \pi r^2$

Площадь тр-ка $AOB = \frac{OB \cdot AC}{2}$; но $OB = r$, а AC определится из прямоугольного тр-ка AOC, где $\angle AOC = 180° - 150° = 30°$, именно $AC = \frac{AO}{2} = \frac{r}{2}$ (зад. 67). Итак, площадь тр-ка $AOB =$

$$= \frac{OB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{4}.$$

Искомая площадь сегмента равна: $\frac{5}{12}\pi r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{12}(5\pi - 3)$.

3) Площадь сектора равна $\pi r^2 \cdot \frac{162}{360} = \frac{9}{20}\pi r^2$.

Площадь тр-ка $AOB = {}^1/_2 OB \cdot AC$; но $OB = r$,

а $AC = \frac{a_{10}}{2} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)$.

[Для доказательства того, что $AC = \frac{a_{10}}{2}$, продолжим AC до пересечения с окружностью и проведем радиус OD. В тр-ке AOD угол AOD равен 36°, следовательно, $AD = a_{10}$, а $AC = {}^1/_2 AD = {}^1/_2 a_{10}$].

Значит, площадь тр-ка $AOB =$

$$= \frac{OB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{r^2}{8}(\sqrt{5}-1).$$

Искомая площадь сегмента равна:

$$\frac{9}{20}\pi r^2 - \frac{r^2}{8}(\sqrt{5}-1) = \frac{r^2}{40}(18\pi - 5\sqrt{5}+5).$$

748. 1) 1-й способ. Площадь средней части полуокружности состоит из сегмента CMD и тр-ка ACD.

Площадь сегмента CMD равна площади сектора $COD = \frac{\pi r^2}{6}$ (так как $\smile CD = {}^1/_6$ окружности) без площади тр-ка OCD, равной $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$ (хорда $CD = a_6 = r$), т.-е. $\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Площадь тр-ка ACD равна площади тр-ка OCD, ибо у обоих общее основание CD и одинаковая высота, так как вершины их A и O лежат на прямой AB, параллельной основанию CD; следовательно, эта площадь равна ${}^1/_4 r^2\sqrt{3}$.

Итак, искомая площадь средней части полуокружности равна

$$\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi r^2}{6}.$$

2-й способ. Вследствие равенства площадей тр-ков ACD и OCD, площадь средней части полуокружности равновелика сектору OCD, т.-е. равна $= {}^1/_6 \pi r^2$.

2) Т. к. концы дуги CD одинаково удалены от концов диаметра AB, следует, что хорда CD параллельна AB.

Тр-ки ACD и OCD, имеющие общее основание CD и одинаковые высоты (так так вершины их A и O лежат на прямой AB, параллельной основанию CD),—равновелики.

Искомая площадь, состоящая из площ. сегмента и тр-ка ACD, равновелика сектору OCD, ибо и искомая площадь и сектор состоят из общей части—сегмента и равновеликих тр-ков $ACD = OCD$.

Площадь же сектора OCD равна $\frac{Q \cdot n}{360}$.

749. 1) Часть площади круга, ограниченная хордами AB и CD, равна разности двух сегментов, с дугами в 120° и 60°.

Площадь сегмента с дугой в 120° равна $\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$, сегмента с дугой в 60° равна $\frac{r^2}{12}(2\pi - \sqrt{33})$ (зад. $745_{1 \text{ и } 3}$).

Следовательно, искомая площадь равна:

$$\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{\pi r^2}{6}.$$

2) Часть площади круга, ограниченная хордами AB и CD, равна разности сегментов с дугами в 150° и 90°.

Площадь сегмента с дугой в 150° равна (зад. 747_2) $\frac{r^2}{12}(5\pi - 3)$, сегмента в 90° — $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$ (зад. 745_2). Следовательно, искомая площадь равна $\frac{r^2}{12}(5\pi - 3) - \frac{r^2}{4}(\pi - 2) = \frac{r^2}{12}(2\pi + 3)$.

750. Площадь общей части кругов состоит из двух сегментов с дугами в 90° и 60°. По зад. $746_{2 \text{ и } 3}$ находим площади их: $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$ и $\frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Сумма площадей этих сегментов и есть искомая площадь общей части кругов:

$$\frac{a^2}{8}(\pi - 2) + \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{24}(7\pi - 6 - 6\sqrt{3}).$$

Второе относительное положение окружностей показано на чертеже (b).

В этом случае общей частью обоих кругов является часть меньшего круга (меньший круг минус заштрихованная часть): Чтобы получить площадь общей части кругов, надо из площади меньшего круга вычесть площадь заштрихованной части.

Радиус меньшего круга получится из равенства $a = r\sqrt{2}$ (ибо хорда a есть сторона вписанного квадрата), откуда $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а площадь круга (меньшего) равна $\frac{\pi a^2}{2}$.

Площадь заштрихованной части есть разность между площадями сегментов, один (меньшего круга) с дугой в 90°, другой (большего круга) с дугой в 60°, т.-е. равна

$$\frac{a^2}{8}(\pi - 2) - \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Итак, площадь искомой общей части кругов:

$$\frac{\pi a^2}{2} - \left[\frac{a}{8}(\pi - 2) - \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})\right] = \frac{a^2}{24}(13\pi + 6 - 6\sqrt{3}).$$

751. Пусть $BC = mx$, $CD = nx$.

Проведем диагональ AC. Так как вписанный $\angle B$ — прямой, то дуга CDA равна полуокружности; следовательно, хорда CA есть диаметр. Пусть радиус круга—R. Из прямоугольного тр-ка ABC имеем: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, или $m^2x^2 + n^2x^2 = 4R^2$, или $x^2(m^2 + n^2) = 4R^2$, откуда $x^2 = \frac{4R^2}{m^2 + n^2}$. Площадь прямоугольника $ABCD = mx \cdot nx =$

$$= mnx^2 = \frac{mn \cdot 4R^2}{m^2 + n^2} = \frac{4mnR^2}{m^2 + n^2}.$$

Величина R^2 определится из равенства $Q = \pi R^2$, откуда $R^2 = \frac{Q}{\pi}$. Подставляя выражение R^2 в формулу для площади прямоугольника, окончательно получим: $\frac{4mn}{m^2 + n^2} \cdot \frac{Q}{\pi} = \frac{4mnQ}{\pi(m^2 + n^2)}$.

752. Пусть стороны прямоугольника $ABCD$ — x и y. Площадь его равна xy. Площадь круга равна πr^2.

По условию, имеем: $xy = \frac{\pi r^2}{2}$, откуда $2xy = \pi r^2$ (1).

Проведем диагональ AC: эта диагональ будет диаметром (зад. 751). Из прямоугольного тр-ка ABC имеем: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, или $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$ (2).

Решив систему ур-ий (1) и (2), найдем x и y. Для этого сложим и вычтем ур-ия (1) и (2). Получим: $x^2 + y^2 + 2xy = 4r^2 + \pi r^2$, или $(x + y)^2 = r^2(4 + \pi)$, откуда $x + y = r\sqrt{4 + \pi}$; $x^2 + y^2 - 2xy = 4r^2 - \pi r^2$, или $(x - y)^2 = r^2(4 - \pi)$, откуда $x - y = r\sqrt{4 - \pi}$. По сумме и разности x и y, найдем эти неизвестные:

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{4 + \pi} + \sqrt{4 - \pi}); \quad y = \frac{r}{2}(\sqrt{4 + \pi} - \sqrt{4 - \pi}).$$

753. Пусть радиус круга—R; тогда высота ромба $KL = 2R$. Из прямоугольного тр-ка ABE, у которого $\angle A = 30°$, а $BE = 2R$, найдем (зад. 67), что $AB = 2BE = 4R$. Площадь ромба равна $AD \cdot BE = 4R \cdot 2R = 8R^2$.

По условию, площадь круга—Q, т.-е. $\pi R^2 = Q$, откуда $R^2 = \frac{Q}{\pi}$.

Искомая площадь ромба: $8R^2 = \frac{8Q}{\pi}$.

754. Пусть радиус круга описанного — R; тогда радиус вписанного (апофема) — $\frac{R}{2}$. Площадь кольца равна разности площадей описанного круга и вписанного: $\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2$.

Площадь равностороннего тр-ка со стороной a равна $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, при чем $a = R\sqrt{3}$. Следовательно, площадь его $R^2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3} = Q$, откуда $R^2 = \frac{4}{9}Q\sqrt{3}$.

Искомая площадь кольца — $\frac{3}{4}\pi \cdot \frac{4}{9}Q\sqrt{3} = \frac{\pi Q\sqrt{3}}{3}$.

755. Пусть радиус сектора $OAMB$ — R.

Площадь сектора равна $\frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$. Проведем прямую OC. Радиус MC сектора $CDME$ равен разности $OC - OM$. Длина OC определится из прямоугольного тр-ка AOC (OA перпендикулярна к AC, как радиус, проведенный в точку касания), в котором катет $OA = R$, а $\angle AOC = \frac{120°}{2} = 60°$; следовательно, $\angle ACO = 30°$; а потому (зад. 67) $OC = 2AO = 2R$.

Радиус сектора $CDME$ равен: $CM = OC - OM = 2R - R = R$.

Угол $DCE = 60°$, так как в 4-угольнике $AOBC$ угол $AOB = 120°$, углы OAC и OBC — прямые (образованы радиусами, проведенными в точки касания, и касательными); значит, 4-й угол равен $4d - (d + d + 120°) = 60°$.

Площадь сектора $CDME$ равна $\frac{\pi R^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$.

Искомое отношение площадей секторов $CDME$ и $OAMB$ равно $\frac{\pi R^2}{6} : \frac{\pi R^2}{3} = 1 : 2$.

756. 1) Четыреугольник $AOBD$ — квадрат, так как смежные стороны равны: $AO = BO = r$, а все углы прямые (угол $AOB = 90°$, углы OAD и OBD прямые, как составленные касательными и радиусами, проведенными в точки касания, 4-й же угол ADB равен прямому, ибо сумма углов 4-угольника равна $4d$); значит, это прямоугольник с равными смежными сторонами, т.-е. квадрат.

Площадь квадрата $= AO^2 = r^2$;

площадь сектора $AOB = \frac{\pi r^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi r^2}{4}$.

Искомая площадь (заштрихована) фигуры $ACBD$ равна разности площадей квадрата $AOBD$ и сектора AOB, т.-е.

$$r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{r^2}{4}(4 - \pi).$$

2) Искомая площадь (заштрихована) $ACBD$ равна разности площадей 4-угольника $AOBD$ и сектора AOB.

Разобьем 4-угольник $AOBD$ на 2 равных прямоугольных тр-ка, AOD и BOD, проведя прямую OD. Площадь прямоугольного тр-ка $AOD = \frac{AO \cdot AD}{2}$, а площадь 4-угольника $AOBD = 2\frac{AO \cdot AD}{2} = AO \cdot AD$; но $AO = r$, а $AD = r\sqrt{3}$, как катет, лежащий против угла в 60° (зад. 67). Следовательно, площадь 4-угольника $AOBD = AO \cdot AD = r \cdot r\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$.

Площадь сектора AOB равна $\frac{\pi r^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi r^2}{3}$.

Искомая площадь (заштрихованная) равна:

$$r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{3} = \frac{r^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi).$$

3) Искомая площадь (заштрихована) фигуры $ACBD$ равна разности площадей 4-угольника $AOBD$ и сектора AOB.

Площадь 4-угольника $AOBD$ разобьем на 2 равных прямоугольных тр-ка AOD и BOD, проведя прямую OD.

Площадь прямоугольного тр-ка $AOD = \frac{AO \cdot AD}{2}$, а площадь 4-угольника $AOBD = 2 \cdot \frac{AO \cdot AD}{2} = AO \cdot AD$; но $AO = r$, а $AD = \frac{AO\sqrt{3}}{3} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ (см. зад. 67), ибо $\angle AOD = \frac{60°}{2} = 30°$. (Пусть $AD = x$, тогда $AO = x\sqrt{3}$, т.-е. $x\sqrt{3} = r$, откуда $x = \frac{r\sqrt{3}}{3}$).

Итак, площадь 4-угольника $AOBD$ равна

$$AO \cdot AD = r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Площадь сектора AOB равна $\frac{\pi r^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$.

Искомая площадь (заштрихованная) равна

$$\frac{r^2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi r^2}{6} = \frac{r^2}{6}(2\sqrt{2} - \pi).$$

757. Искомая площадь (заштрихована) состоит из 3-х равных равнобедренных прямоугольных тр-ков: ODL, OEF и OKG (катеты равны, напр. $OL = OD$, как радиусы круга) и 3-х равных секторов ODE, OFG и OKL (у всех центральный угол равен $\frac{4d - 3d}{3} = \frac{d}{3} = 30°$).

В тр-ке ABC апофема OM равна $^1/_3$ высоты H, равной MC, т.-е. $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ $\left(H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$.

Площадь одного тр-ка $= \frac{r^2}{2}$, а трех — $\frac{3r^2}{2}$; площадь одного сектора $= \frac{\pi r^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi r^2}{12}$. В задаче спрашивается, чему равна площадь $\frac{3r^2}{2} + \frac{3\pi r^2}{12}$, или $\frac{r^2}{4}(6 + \pi)$; найдем, чему равно r^2.

Рассматривая равнобедренный прямоугольный тр-к LOD, у которого катеты равны радиусу проведенной окружности, а высота $OM = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, находим, что гипотенуза $LD = 2MD = 2OM = 2 \cdot \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ (высота OM является и медианой, а медиана гипотенузы вдвое меньше ее). С другой стороны, хорду LD, стягивающую дугу в 90°, рассматриваем, как сторону квадрата, равную $r\sqrt{2}$.

Следовательно, $r\sqrt{2} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, откуда $r^2 = \frac{a^2}{6}$.

Итак, площадь каждого из равнобедренных прямоугольных тр-ков равна $\frac{r^2}{2}$, секторов — $\frac{\pi r^2 \cdot 30}{360}$ или $\frac{\pi r^2}{12}$.

Искомая площадь (заштрихованная) равна:

$$3 \cdot \frac{r^2}{2} + 3 \cdot \frac{\pi r^2}{12} = \frac{r^2}{4}(6 + \pi) = \frac{a^2}{24}(6 + \pi).$$

758. Искомая площадь фигуры $EOFO_1$ состоит из двух равных сегментов EOF и EO_1F с дугой в 120°. В самом деле, проведя радиусы OE, O_1E и OF, заметим, что тр-к OO_1E — равносторонний, а потому $\angle EOO_1 = 60°$, а $\angle EOF = 2\angle EOO_1 = 2 \cdot 60° = 120°$.

Площадь сегмента с дугой в 120° равна (зад. 745_1): $\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$; следовательно, площадь искомой фигуры равна удвоенному сегменту: $\frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

759. Площадь полученной розетки состоит из 8 равных сегментов (один из них заштрихован), каждый с дугой в 90°, а радиус равен $\frac{a}{2}$.

Площадь сегмента с дугой в 90° равна (зад. 745_2) $\frac{r^2}{4}(\pi-2)$, а 8 сегментов — $8 \cdot \frac{r^2}{4}(\pi-2)$, или $2r^2(\pi-2)$.

Заменив r через $\frac{a}{2}$, получим: $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$.

760. Примечание. Противоположные полуокружности касаются между собой, так как линии центров KL и MN равны стороне ромба, т.-е. сумме радиусов.

Искомая площадь розетки состоит из 4-х пар сегментов (одна пара заштрихована).

Площадь одной пары сегментов равна площади полукруга $AMOD$ без площади прямоугольного тр-ка AOD, равной $^1/_4$ площади ромба, т.-е. $^1/_2\pi AL^2 - {}^1/_4\frac{AO \cdot OD}{2}$.

Площадь розетки равна, следовательно, учетверенной такой разности, т.-е. площади 2-х кругов без площади ромба.

Площадь одного круга равна πAL^2, двух кругов — $2\pi \cdot AL^2$. Площадь ромба равна $4 \cdot \frac{AO \cdot OD}{2} = \frac{2AO \cdot 2OD}{2} = \frac{ab}{2}$, ибо

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2},\ OD = \frac{BD}{2} = \frac{b}{2}.$$

Сторону ромба AD определим из прямоугольного тр-ка AOD, именно: $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = {}^1/_2\sqrt{a^2+b^2}$.

Следовательно, площадь 2-х кругов

$$2\pi \cdot AL^2 = 2\pi \cdot \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}AD^2 = \frac{\pi}{8}(a^2+b^2).$$

Искомая площадь равна: $\frac{\pi}{8}(a^2+b^2) - \frac{ab}{2}$.

761. Площадь розетки равна площади 6 сегментов, из которых каждый есть сегмент с дугой в 60°, (напр., дуга OKC): вписанный угол $AOC = 120°$; следовательно, дуга AMC содержит 240°; значит, дуга AOC содержит $360° - 240° = 120°$, а дуга OKC, равная половине дуги AOC, содержит $\frac{120°}{2} = 60°$.

Найдем радиус R круга O_1. Хорда $AC = a$, очевидно, есть сторона правильного вписанного тр-ка, ибо стягивает дугу AOC в 120°. Имеем равенство: $a = R\sqrt{3}$, откуда $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Площадь сегмента с дугой в 60° равна (зад. 745_3): $\frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. Следовательно, площадь искомой розетки равна $6 \cdot \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$, или, подставив $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ вместо r, окончательно:

$$\frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

762. Искомая площадь фигуры $AQMP$ состоит из 2-х равных сегментов, с дугой в 30°. В самом деле. Проведем хорду AM. Прямой угол BAC разделился пополам, т.-е. $\angle BAM = 45°$; следовательно, дуга BLM содержит 90°, а дуга $APM = 120° - 90° = 30°$.

Хорда $AB = a$ является стороной правильного вписанного тр-ка, ибо стягивает дугу в 120°. Имеем равенство: $a = r\sqrt{3}$, откуда $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, Площадь сегмента с дугой в 30° равна (зад. 745_5) $\frac{r^2}{12}(\pi - 3)$, двух сегментов — $2 \cdot \frac{r^2}{12}(\pi - 3)$. Заменив r через $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, получим выражение искомой площади фигуры $AQMP$:

$$\frac{a^2}{18}(\pi - 3).$$

763. Одна и та же хорда, соответствующая двум дугам в 120° и 240°, является хордой о д н о й окружности (делящей окружность на два сегмента), или хордой двух одинаковых пересекающихся окружностей, как в данном случае.

Если хорда стягивает дугу в 120°, то она является стороной правильного вписанного тр-ка и отстоит от центра на половину радиуса (на апофему), а потому

$$O_1K = OK - OL - O_1L = 2r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} = r, \text{ т.-е. } O_1K = a = r.$$

Как видно из чертежа, площадь луночки равна площади круга без 2 сегментов, включающих дугу в 120° (AOB и AO_1B),

Площадь сегмента с дугой в 120° равна (зад. 745_1)

$$\frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}), \text{ двух сегментов} - \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$\pi r^2 - \frac{r^2}{6}(4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{r^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}), \text{ или } \frac{a^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

764. Пусть радиус OA разделен в крайнем и среднем отношении, т.-е. $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{AB}$.

$$OB = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad AB = \frac{r}{2}(3 - \sqrt{5}) \text{ (зад. 498).}$$

Площадь круга равна πr^2.

Площадь внутреннего круга равна

$$\pi\left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2 = \frac{\pi r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{\pi r^2}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Площадь кольца равна площади круга большего без площади круга внутреннего: $\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Сравнив полученные выражения, заметим, что площадь круга разделилась в таком же отношении, как и радиус, при чем б о л ь ш е й частью оказалась площадь кольца.

П р и м е ч а н и е. В выражениях частей радиуса входит r (радиус) в выражениях частей круга — πr^2 (площадь круга) взамен r.

765. Пусть диаметр D разделен на n частей:

$$AC = CD = DE = \ldots = \frac{D}{n}.$$

Площадь круга равна πR^2, или $\frac{\pi D^2}{4}$.

Следовательно, площадь круга, диаметра AC, равна $\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2$, полукруга — $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2$.

Площадь полукруга, диаметра $AD = 2 \cdot \frac{D}{n}$, равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2.$$

Площадь полукруга, диаметра $AE = 3 \cdot \frac{D}{n}$, равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 9 \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2.$$

Площадь полукруга, диаметра $AF = 4 . \frac{D}{n}$, равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} . 16 . \left(\frac{D}{n}\right)^2 .$$

Площадь фигуры $AKDC$ равна площади полукруга, диаметра AD, без площади полукруга, диаметра AC, т.-е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} . 4 . \left(\frac{D}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2 . 3.$$

Площадь фигуры $ALEDK$ равна разности полукругов диаметров AE и AD, т.-е. $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2 . 5.$

Площадь фигуры $AMFEL$ равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{D}{n}\right)^2 .7.$

Как видим, площади фигур в верхнем полукруге составляют разностную прогрессию.

Такие же фигуры образовались и в нижнем полукруге (построение то же), но размещены в обратном порядке. Каждая фигура, ограниченная двумя непрерывными изогнутыми линиями, состоит из двух частей, — одна в верхнем полукруге, другая — в нижнем, при чем соединяются в таком порядке: 1-я — верхнего полукруга и последняя (т.-е. 1-я с конца) нижнего; 2-я верхнего полукруга и предпоследняя (т.-е. 2-я с конца) — нижнего и т. д. Таким образом каждая фигура равна сумме двух членов разностной прогрессии, равноотстоящих от начала и конца. Из алгебры известно, что всякая сумма пары таких членов прогрессии равна сумме крайних членов ее.

Следовательно, все эти фигуры имеют равные площади.

Периметр каждой фигуры состоит из 3-х полуокружностей (крайние) или 4-х, при чем каждая пара полуокружностей имеет диаметры, сумма которых равна диаметру D данной окружности.

Пусть 4 полуокружности какой-нибудь фигуры имеют попарно диаметры x и $D - x$, y и $D - y$.

Длина окружности равна $2\pi R$ или πD, полуокружности — $\frac{\pi D}{2}$.

Длина указанных полуокружностей:

$$\frac{\pi x}{2}, \quad \frac{\pi (D - x)}{2}, \quad \frac{\pi y}{2} \text{ и } \frac{\pi (D - y)}{2};$$

сложив эти величины, получим πD, т.-е. длину данной окружности.

766. В равнобедренном прямоугольном тр-ке острые углы равны 45°, т.-е. $\angle BAC = 45°$, а квадрат гипотенузы равен удвоенному квадрату катета, т.-е. $AC^2 = 2AB^2$.

Пусть $AB = BC = a$; $AC = b$; $b^2 = 2a^2$.

Площадь сектора $BADC$ равна $\frac{\pi a^2}{4}$.

Площадь сектора $ACEF$ равна $\frac{\pi b^2 . 45}{360} = \frac{\pi b^2}{8}$.

Заменив в последнем выражении b^2 через $2a^2$, получим для площади сектора $ACEF$ выражение: $\frac{\pi a^2}{4}$, что и требовалось доказать.

767. Пусть $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$.

Площадь сегмента BFC равна площади сектора $ABFC$ без площади тр-ка ABC. Сумма площадей сегментов BDA и AEC равна площади полукруга $BDAEC$ без площади того же тр-ка ABC. Но площадь сектора $ABFC$ равна $\frac{\pi a^2}{4}$, площадь полукруга $BDAEC$ равна $^1/_2 \frac{\pi . 2a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$ (по формуле $\frac{\pi D^2}{4}$); следовательно, и разности, где уменьшаемое и вычитаемое одинаковы, равны между собою.

768. Площадь тр-ка $ABD = \frac{AD^2}{2} = R^2$ ($AD = R\sqrt{2}$, как сторона вписанного квадрата).

Площадь луночки равна разности площадей полукруга ACB и сегмента AMB.

Площадь полукруга равна $\frac{\pi R^2}{2}$, площадь сегмента с дугой в 90° равна (зад. 746_2) $\frac{a^2}{8}(\pi - 2)$, или ($a = AB = 2R$) $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$.

Итак, площадь луночки равна $\frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2}(\pi - 2) = R^2$.

Следовательно, площадь луночки $AMBC$ равновелика площади тр-ка ABD.

769. Пусть $CD = a$, $AD = p$, $BD = q$, $AB = D$. Имеем: $a^2 = pq$ (перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между отрезками диаметра); $p + q = D$; $(p + q)^2 = D^2$, или $p^2 + q^2 + 2pq = D^2$.

Площадь круга, с диаметром $CD = a$, равна

$$\frac{\pi a^2}{4} \text{ или } (a^2 = pq)\ \frac{\pi}{4} pq.$$

Площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна разности между площадью полукруга, диаметра AB, и суммою площадей полуокружностей, диаметров $AD = p$ в $BD = q$, т.-е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi p^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi q^2}{4} \right) = \frac{\pi}{8} (D^2 - p^2 - q^2);$$

но из равенства $D^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ следует: $D^2 - p^2 - q^2 = 2pq$. Подставив $2pq$ вместо $D^2 - p^2 - q^2$, получим $\frac{\pi}{4} pq$.

Следовательно, площадь круга, диаметра CD, равна площади, заключенной между 3-мя полуокружностями.

Смешанный отдел.

770. Искомая EF высотой разделилась на 2 отрезка EO и OF. Определим отдельно величину EO и OF.

Для этого определим раньше следующие величины:

гипотенуза $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125$ *см*;

отрезок $AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{75^2}{125} = 45$ *см*; $BD = AB - AD = 125 - 45 = 80$ *см*;

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{75 \cdot 100}{125} = 60 \text{ см}; \quad OC = OD = 30 \text{ см}.$$

Прямоугольные тр-ки ACD и OEC подобны, ибо у них общий острый угол ACD. Из подобия их следует: $\frac{EO}{AD} = \frac{OC}{AC}$, или $\frac{EO}{45} = \frac{30}{75}$, откуда $OE = 18$ *см*.

Прямоугольные тр-ки BCD и ODF подобны, ибо OF параллельна BC. Из их подобия следует: $\frac{OF}{BC} = \frac{OD}{CD}$, или $\frac{OF}{100} = \frac{30}{60}$, откуда $OF = 50$ *см*.

Искомая $EF = EO + OF = 18 + 50 = 68$ *см*.

771. Бóльшая диагональ ромба равна 50 *дм* + 14 *дм* = 64 *дм*; следовательно, если считать, что окружность описана около тр-ка BCD, то высота CO этого тр-ка равна $^{64}/_{2} = 32$ *дм*.

Больший отрезок диагонали 5*м* или 50 *дм*, есть, очевидно, диаметр; значит, радиус равен 25 *дм*.

По теореме: „радиус круга описанного равен произведению двух сторон, деленному на двойную высоту", имеем: $\frac{BC \cdot CD}{2 \cdot CO} = R$, или $\frac{x^2}{2 \cdot 32} = 25$, откуда сторона ромба равна $x = 40$ *дм* или 4 *м*.

772. Проведем OA и OO_2.

Искомую линию центров определяем из тр-ка OO_1O_2, по теореме: „квадрат стороны, лежащей против острого угла ($\angle O = 60°$), равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения основания на отрезок, от вершины острого угла до высоты":

$$O_1O_2^2 = OO_2^2 + OO_1^2 - 2OO_1 \cdot OB.$$

Но $OO_2 = R + r$, $OO_1 = R - r$, $OB = \frac{OO_2}{2} = \frac{R+r}{2}$ (зад. 67).

Следовательно, $O_1O_2^2 = (R+r)^2 + (R-r)^2 - 2 \cdot (R-r) \cdot \frac{R+r}{2}$, откуда $O_1O_2^2 = R^2 \quad 3r^2$ или $O_1O_2 = \sqrt{R^2 \quad 3r^2}$.

773. Пусть $AB = 65$ *см*, $BC = 70$ *см*, $AC = 75$ *см*, $BK : KD = 2 : 3$.

Отрезок MN определится из пропорции (тр-ки ABC и BMN подобны): $\frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BD}$; но $AC = 75$ *см*, а $\frac{BK}{BD} = \frac{2}{5}$; следовательно, $\frac{MN}{75} = \frac{2}{5}$, откуда $MN = 30$ *см*.

Высота BD тр-ка ABC определится из равенства $\frac{BD \cdot AC}{2} = S$, откуда $BD = \frac{2S}{AC}$; $AC = 75$ *см*, а $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{65+70+75}{2} = 105$ *см*, именно:

$$S = \sqrt{105(105-65)(105-70)(105-75)} = \sqrt{105 \cdot 40 \cdot 35 \cdot 30} = 2100 \text{ см}^2.$$

Следовательно, $BD = \frac{2 \cdot 2100}{75} = 56$ *см*, а высота трапеции $KD = {}^3/_5 \cdot BD = {}^3/_5 \cdot 56$.

Площадь трапеции $AMNC$ равна $\frac{MN + AC}{2} \cdot KD$, или

$$\frac{30+75}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 56 = 1764 \text{ см}^2.$$

774. Пусть $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$.

1 й с п о с о б. Опустим высоту $BD = h$.

Из прямоугольного тр-ка ABD гипотенуза AB определится по зад. 67: $AB = \frac{2BD}{3}\sqrt{3} = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$; в прямоугольном равнобедренном тр-ке BDC: $DC = BD = h$, гипотенуза $BC = BD\sqrt{2} = h\sqrt{2}$.

По теореме: „радиус круга описанного равен произведению двух сторон, деленному на двойную высоту", имеем:

$$\frac{AB \cdot BC}{2BD} = R, \text{ или } \frac{2h\sqrt{3} \cdot h\sqrt{2}}{3 \cdot 2h} = R, \text{ откуда } h = \frac{R}{2}\sqrt{6}.$$

Искомая площадь равна $\frac{AC \cdot BD}{2}$; но

$$AC = AD + DC = \frac{AB}{2} + BD = \frac{h}{3}\sqrt{3} + h \left(AD = \frac{AB}{2} \text{ по зад. 67}\right).$$

Следовательно, $\frac{AC \cdot BD}{2} = \left(\frac{h\sqrt{3}}{3} + h\right)\frac{h}{2} = \frac{h^2}{6}(\sqrt{3} + 3)$, или, заменив h через $\frac{R}{2}\sqrt{6}$, получим: $\frac{R^2}{4}(3 + \sqrt{3})$.

2 й с п о с о б. Можно описать окружность около тр-ка ABC. Тогда дуга AB содержит $2 \cdot 45° = 90°$, т.-е. хорда AB – сторона квадрата и равна $R\sqrt{2}$; дуга BC содержит $2 \cdot 60° = 120°$; следовательно, хорда $BC = a_3 = R\sqrt{3}$; хорда AC содержит 150° и определяется по зад. 551_3, т.-е. равна $R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Площадь определяем по формуле: $S = \frac{abc}{4R}$.

775. Пусть катеты $20x$ и $21x$, тогда гипотенуза равна $\sqrt{(20x)^2 + (21x)^2} = 29x$. Радиус описанного круга равен половине гипотенузы (зад. 228): $\frac{29}{2}x$; радиус вписанного круга равен полуразности между суммой катетов и гипотенузой (зад. 701): $\frac{(a+b)-c}{2} = \frac{(20x + 21x) - 29x}{2} = 6x$. Следовательно, по условию, $\frac{29}{2}x - 6x = 17$ *см*, откуда $x = 2$ *см*.

Искомые катеты: $20x = 40$ *см* и $21x = 42$ *см*.

776. Пусть $AC = x$, $CD = y$, $DB = z$; $AB = x + y + z$.

Площадь заштрихованной части листка в верхнем полукруге равна разности площадей полукругов AD и AC, т.-е.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}x^2.$$

Площадь заштрихованной части листка в нижнем полукруге равна разности площадей полукругов BC и BD, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(y+z)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}z^2.$$

Следовательно, площадь листка равна:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(x+y)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(y+z)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}z^2=$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot y(x+y+z)=\frac{\pi}{4}\cdot CD\,.\,AB.$$

Площадь круга равна $\frac{\pi AB^2}{4}$.

Искомое отношение площади листка к площади круга равно:

$$\frac{\pi}{4}\cdot CD\,.\,AB:\frac{\pi AB^2}{4}=CD:AB.$$

Периметр листка равен сумме 4 полуокружностей, диаметров AC, AD, CB и DB: $^1/_2\pi x+{}^1/_2\pi(x+y)+{}^1/_2\pi(y+z)+{}^1/_2\pi z=$ $=\pi(x+y+z)=\pi\,.\,AB$; а это и есть окружность данного круга.

777. 1) Хорда AB стягивает дугу в 30°; следовательно, это сторона правильного вписанного 12-угольника и равна (зад. 53$^1_2$) $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Хорду AC определяем из прямоугольного тр-ка ABC, именно: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{4r^2-r^2(2-\sqrt{3})}=r\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Искомая площадь прямоугольника $ABCD$ равна $AB\,.\,AC=$ $=r\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.\,r\sqrt{2+\sqrt{3}}=r^2$.

2) Хорда AB стягивает дугу в 45° и равна стороне правильного вписанного 8-угольника (зад. 53$^1_1$) $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; хорду AC определяем из прямоугольного тр-ка ABC, именно:

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{4r^2-r^2(2-\sqrt{2})}=r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Искомая площадь прямоугольника $ABCD$ равна

$$AB\,.\,AC=r\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.\,r\sqrt{2+\sqrt{2}}=r^2\sqrt{2}.$$

3) Хорда AB, стягивающая дугу в 60°, равна стороне правильного вписанного 6-угольника a_6, или r; хорда AC, стягивающая дугу в $180°-60°=120°$, равна стороне правильного вписанного тр-ка a_3, или $r\sqrt{3}$.

Искомая площадь прямоугольника $ABCD$ равна $AB\,.\,AC=$ $=r\,.\,r\sqrt{3}=r^2\sqrt{3}$.

778. Пусть $MN = {}^2/_3 R$. Опустим высоту BO Из прямоугольного тр-ка OBM определим отрезок хорды $BM = \sqrt{OB^2 + MO^2}$; но $OB = R$, $OM = {}^1/_2 MN = \frac{R}{3}$; следовательно,

$$BM = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{9}} = \frac{R}{3}\sqrt{10}.$$

Опустим высоту OP на гипотенузу BM. По теореме: „катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу", имеем: $OB^2 = BM \cdot BP$, или $R^2 = \frac{R}{3}\sqrt{10} \cdot BP$, откуда $BP = \frac{3R}{\sqrt{10}}$. Но $BP = \frac{AB}{2}$, ибо перпендикуляр из центра круга на хорду делит хорду пополам; следовательно,

$$AB = 2BP = 2 \cdot \frac{3R}{\sqrt{10}} = \frac{6R}{\sqrt{10}}.$$

Тр-ки ABC и BMN подобны, так как хорда AC параллельна диаметру. Из подобия их имеем:

$$\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{MB}, \text{ или } AC : \frac{2}{3}R = \frac{6R}{\sqrt{10}} : \frac{R}{3}\sqrt{10}, \text{ откуда } AC = \frac{6}{5}R.$$

Теперь определим, какой части диаметра равна хорда AC:

$$AC = \frac{6}{5}R : 2R = \frac{6R}{10R} = \frac{3}{5} \text{ диаметра.}$$

779. Пусть радиус круга — r.

Дуга AND содержит $360° - 210° = 150°$; следовательно, дуга AB содержит $180° - 150° = 30°$, и хорда AB есть сторона правильного вписанного 12-угольника, равная (зад. 530_2) $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Сторона AD прямоугольника определится, как катет прямоугольного тр-ка ABD, именно:

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})} = r\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна

$AB \cdot AD = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot r\sqrt{2 + \sqrt{3}} = r^2$. Значит, $r^2 = Q$.

Площадь искомого сегмента $ABMCD$ равна площади круга без площади сегмента AND с дугой в 150°.

Площадь круга равна πr^2.

Площадь сегмента AND с дугой в 150° равна (зад. 747_2) $\frac{r^2}{12}(5\pi - 3)$. Площадь искомого сегмента $ABMCD$ равна

$$\pi r^2 - \frac{r^2}{12}(5\pi - 3) = \frac{r^2}{12}(7\pi + 3) = \frac{Q}{12}(7\pi + 3).$$

780. Пусть стороны параллелограма AB и BC равны x и $2x$, диагонали BD и AC равны y и $2y$.

По теореме (сумма квадратов сторон параллелограма равна сумме квадратов диагоналей), $2(x^2+4x^2)=y^2+4y^2$, или $2x^2=y^2$, откуда $y=x\sqrt{2}$, или $BD=x\sqrt{2}$.

По теореме: „квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения основания на отрезок от вершины острого угла до высоты", имеем: $BD^2=AB^2+AD^2-2AD\,.\,AE$, или $(x\sqrt{2})^2=x^2+(2x)^2-2.2x\,.\,AE$, откуда

$$AE=\frac{3x^2}{4x}=\frac{3}{4}x;\quad ED=AD-AE=2x-\frac{3}{4}x=\frac{5}{4}x.$$

Искомое отношение будет $AE:ED={}^3/_4x:{}^5/_4x=3:5$.

781. Пусть $AB=30$ *см*, $BC=42$ *см*, $CD=26$ *см*, $AD=70$ *см*; $BE=x$ $CE=y$

Тр-ки AED и EBC подобны, вследствие параллельности сторон BC и AD. Из их подобия имеем:

1) $\frac{BE}{AE}=\frac{BC}{AD}$, или $\frac{BE}{AB+BE}=\frac{BC}{AD}$; после подстановки числовых значений получим: $\frac{x}{30+x}=\frac{42}{70}$; последнюю пропорцию упростим: $28x=1260$ *см*, откуда $x=45$ *см*.

2) $\frac{CE}{DE}=\frac{BC}{AD}$, или $\frac{CE}{CD+CE}=\frac{BC}{AD}$; после подстановки числовых значений получим: $\frac{y}{26+y}=\frac{42}{70}$. По упрощении, получим: $28y=1092$ *см*, откуда $y=\frac{1092}{28}=39$ *см*.

Искомая площадь трапеции равна разности площадей тр-ков AED и BEC, определяемых по формуле $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Для тр-ка AED со сторонами $AE=AB+BE=30+45=75$ *см*, $DE=CD+CE=26+39=65$ *см* и $AD=70$ *см*, $p=\frac{75+65+70}{2}=105$ *см*, и формула перепишется так:

$$S=\sqrt{105(105-75)(105-65)(105-70)}=\sqrt{105\,.\,30\,.\,40\,.\,35}=2100\ см^2.$$

Для тр-ка BEC со сторонами $BE=45$ *см*, $CE=39$ *см*, $BC=42$ *см*, $p=\frac{45+39+42}{2}=63$ *см*. формула перепишется так:

$$S=\sqrt{63(63-45)(63-39)(63-42)}=\sqrt{63\,.\,18\,.\,24\,.\,21}=756\ см^2.$$

Искомая площадь трапеции равна $2100-756=1344$ *см*^{2}.

782. 1) 1-й способ. Пусть радиус вписанного круга — r. Проведем из центра O_1 радиус O_1L в точку касания. В прямоугольном тр-ке OO_1L угол $LOO_1 = 30°$, гипотенуза $OO_1 = OK - O_1K = R - r$, катет $O_1L = r$.

Имеем равенство (зад. 67): $O_1L = \frac{OO_1}{2}$, или $r = \frac{R-r}{2}$, откуда $r = \frac{R}{3}$.

2-й способ. Проведя касательную A_1B_1 и продолжив радиусы OA и OB, получим равносторонний тр-к OA_1B_1, у которого высота $OK = R$, а вписанный в сектор круг является вписанным в него кругом.

Высота $OK = \frac{A_1B_1}{2}\sqrt{3}$ (свойство равностороннего тр-ка) или $R = \frac{A_1B_1}{2}\sqrt{3}$, откуда $A_1B_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Радиус вписанного круга равен $\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{3}$ (апофема равна половине радиуса—в правильном тр-ке), или $\frac{1}{2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{3}$.

2) 1-й способ. Пусть радиус вписанного круга — r.

Проведем из центра O_1 радиус O_1L в точку касания. В прямоугольном тр-ке OO_1L угол $LOO_1 = 45°$, гипотенуза $OO_1 = OK - O_1K = R - r$, катет $O_1L = r$.

Имеем равенство $OO_1 = O_1L\sqrt{2}$, или $R - r = r\sqrt{2}$, откуда

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}+1} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = R(\sqrt{2}-1).$$

2-й способ. Проведя касательную A_1B_1 и продолжив радиусы OA и OB, получим равнобедренный прямоугольный тр-к OA_1B_1, у которого высота $OK = R$, а вписанный в него круг будет вписанным и в сектор. Высота $OK = R$. Из равнобедренного прямоугольного тр-ка A_1OK, у которого $A_1K = OK = R$, находим: $A_1O = R\sqrt{2}$.

Проведем в точку касания радиус $O_1L = r$.

Прямоугольные тр-ки A_1OK и LOO_1, у которых острый угол A_1OK — общий, подобны. Из их подобия имеем:

$$\frac{O_1L}{A_1K} = \frac{OO_1}{A_1O} \text{ или } \frac{r}{R} = \frac{R-r}{R\sqrt{2}}, \text{ откуда } r = \frac{R}{\sqrt{2}+1} = R(\sqrt{2}-1).$$

3) 1-й способ. Пусть радиус вписанного круга — r.

Проведем из центра O_1 радиус O_1L в точку касания.

В прямоугольном тр-ке OO_1L угол $LOO_1 = 60°$, гипотенуза $OO_1 = OK - O_1K = R - r$, катет $O_1L = r$. Имеем равенство (зад. 67):

$$O_1L = \frac{OO_1}{2}\sqrt{3}, \text{ или } r = \frac{R-r}{2}\sqrt{3}, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{R(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = R(2-\sqrt{3})\sqrt{3} = R(2\sqrt{3}-3).$$

2-й способ. Проведем касательную A_1B_1 и радиус $O_1L = r$ в точку касания. Из прямоугольного тр-ка A_1OK, у которого угол $A_1OK = \frac{120°}{2} = 60°$, находим: $A_1K = OK\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, $A_1O = 2OK = 2R$ (зад. 67).

Прямоугольные тр-ки A_1OK и OLO_1, у которого острый угол A_1OK — общий, подобны, и на основании этого подобия напишем:

$$\frac{O_1L}{A_1K} = \frac{OO_1}{A_1O}, \text{ или } \frac{r}{R\sqrt{3}} = \frac{R-r}{2R}, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{R(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = R(2-\sqrt{3})\sqrt{3}, \text{ или } R(2\sqrt{3}-3).$$

783. 1) Опустим из вершины E высоту EF. Отношение площадей тр-ков ADE и ABC равно $\frac{AD \cdot EF}{2} : \frac{AC \cdot BD}{2}$, или

$$AD \cdot EF : AC \cdot BD \quad (1).$$

Так как прямоугольный тр-к ABD, у которого острый угол $A = 45°$, равнобедренный, т.-е. $BD = AD$, то отношение $AD \cdot EF : AC \cdot BD$ примет вид $EF : AC$ (2); но $EF = AF$ (ибо и прямоугольный тр-к AEF — равнобедренный); а потому отношение $EF : AC$ перепишется в виде $AF : AC$ (3).

На основании теоремы: „высота прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между проекциями катетов", напишем:

$EF^2 = CF \cdot AF$; но $EF = AF$; следовательно,

$AF^2 = CF \cdot AF$, или $AF = CF$, т.-е. $AC = 2AF$.

Окончательно отношение (3) для площадей тр-ков ADE и ABC перепишется так: $AF : 2AF$ или $1 : 2$.

2) Опустим из вершины E высоту EF на сторону AD тр-ка ADE. Отношение площадей тр-ков ADE и ABC равно

$$AD \cdot EF : AC \cdot BD.$$

Из прямоугольного тр-ка ABD (с углом $A = 30°$): $AD = BD\sqrt{3}$ (зад. 67) (1); из прямоугольного тр-ка AEF находим: $AE = 2EF$; из прямоугольного тр-ка ACE имеем:

$$AC = 2CE = 2 \cdot \frac{AE}{\sqrt{3}}, \text{ или } AC = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2EF = \frac{4EF}{\sqrt{3}} \quad (2).$$

Подставив в отношение $AD \cdot EF : AC \cdot BD$ значения AD и AC из (1) и (2), получим $BD\sqrt{3} \cdot EF : \frac{4EF}{\sqrt{3}} \cdot BD$; по сокращении получим отношение: 3 : 4.

Это и есть искомое отношение.

784. Пусть $OF = x$, $OE = 39 - x$.

Проведем радиусы OA и OC и высоту EF; тогда $AE = \frac{AB}{2} = 7$ *см* и $CF = \frac{CD}{2} = 20$ *см*.

Из прямоугольных тр-ков OAE и OCF имеем: $OA^2 = OE^2 + AE^2$, или $R^2 = (39 - x)^2 + 7^2$ и $OC^2 = OF^2 + CF^2$, т.-е. $R^2 = x^2 + 20^2$; следовательно, $(39 - x)^2 + 7^2 = x^2 + 20^2$, откуда $x = 15$; подставив значение x в выражение $R^2 = x^2 + 20^2$, найдем: $R^2 = 625$.

Искомая площадь круга: $\pi R^2 = 625\pi$ *см*^{2}.

Условия задачи (числовые) не допускают положения центра вне данных параллельных прямых.

785. Площадь фигуры, ограниченной тремя дугами, состоит из равных площадей 3-х сегментов и площади равностороннего тр-ка ABC.

Площадь каждого из сегментов равна (зад. 746_3) $\frac{a}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (хорда AC равна радиусу, т.-е. AC — сторона правильного вписанного 6-угольника), площадь равностороннего тр-ка равна $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Искомая площадь фигуры равна

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{a^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}).$$

Радиус круга, вписанного в фигуру, ограниченную тремя сегментами, $OM = OK + KM$; OK — апофема тр-ка и равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$, величина же KM есть разность между радиусом BM круга и его апофемой BK, т.-е. $a - \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (радиус круга равен a — стороне

правильного 6-угольника, а апофема BK найдется, как высота правильного тр-ка ABC со стороной a, именно $\frac{a}{2}\sqrt{3}$).

Итак, $OM = OK + KM = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} + (a - \frac{a}{2}\sqrt{3}) = \frac{a}{3}(3 - \sqrt{3})$.

786. Пусть $AE = 8$ *см*, $ED = 6$ *см*.

Из прямоугольного тр-ка AED находим $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ *см*.

Проведя медиану EF из вершины прямого угла, найдем, что $EF = \frac{AD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ *см* (зад. 228). Но $EF = AB$, так как между двумя равными и параллельными отрезками BE и AF лежат отрезки тоже равные и параллельные; значит, $AB = 5$ *см*.

Из прямоугольного тр-ка AED найдем высоту EH, как высоту из вершины прямого угла: $AD \cdot EH = AE \cdot ED$, или $10 \cdot EH = 8 \cdot 6$, откуда высота $EH = 4{,}8$ *см*.

Из прямоугольного тр-ка ABG найдем отрезок AG:

$$AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{5^2 - 4{,}8^2} = 1{,}4 \text{ см};$$

отрезок $GD = AD - AG = 10 - 1{,}4 = 8{,}6$ *см*.

Диагональ BD определим из прямоугольного тр-ка BGD:

$$BD = \sqrt{BG^2 + GD^2} = \sqrt{4{,}8^2 + 8{,}6^2} = \sqrt{97} \text{ см}.$$

Бóльшая диагональ $AC = x$ найдется из равенства (сумма квадратов сторон параллелограма равна сумме квадратов диагоналей): $2(5^2 + 10^2) = x^2 + 97$, откуда $AC = x = \sqrt{153}$ *см*.

787. 1) Пусть угол $BAC = 75°$, тогда угол $ABC = 90° - 75° = 15°$.

Пристроим к тр-ку ABC такой же тр-к A_1BC, как показано на чертеже. Угол $A_1BA = 30°$. Равнобедренный тр-к A_1BA рассматриваем, как $^1/_{12}$ правильного вписанного 12-угольника, в котором B — центр, AB — радиус, а $AA_1 = a_{12}$ — сторона его.

Сторона правильного вписанного 12-угольника равна $r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (зад. 530); следовательно (заметив, что $r = c$, где c — гипотенуза), катет $AC = \frac{c}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, катет $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}(2 - \sqrt{3})} = \frac{c}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; высота $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ (из равенства $AB \cdot CD = AC \cdot BC$); т.-е.

$$CD = \frac{c}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} : c = \frac{c}{4}$$

Упражнение. Решить эту задачу, разделив угол $BAC = 75°$ на 2 угла: 15° и 60°, 45° и 30°.

2) Пусть угол $BAC = 67°30'$, тогда угол $ABC = 90° - 67°30' = 22°30'$.

Пристроим к тр-ку ABC такой же тр-к A_1BC, как показано на чертеже. Угол $A_1BA = 45°$.

Равнобедренный тр-к A_1BA рассматриваем, как $^1/_8$ правильного вписанного 8-угольника, в котором B — центр, BA — радиус, а $AA_1 = a_8$ — сторона его.

Сторона правильного вписанного 8-угольника равна (зад. 530_1) $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; следовательно (заметив, что $r = c$, где c — гипотенуза: катет $AC = \frac{c}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; катет $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} =$

$$= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}(2-\sqrt{2})} = \frac{c}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Высота $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{c}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{c}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} : c = \frac{c}{4}\sqrt{2}$

(пользуемся равенством $CD \cdot AB = AC \cdot BC$).

788. Из зад. 701_1 напишем зависимость между сторонами прямоугольного тр-ка и радиусом вписанного круга. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза и r — радиус вписанного круга. Тогда $r = \frac{a+b-c}{2}$, откуда $a + b = 2r + c = 2 \cdot 6 + 50 = 62$ *см*. Полагая $a = x$, а, следовательно, $b = 62 - x$, составим ур-ие: $x^2 + (62-x)^2 = 50^2$ и перепишем его: $x^2 - 62x + 672 = 0$. Решив это ур-ие, найдем

$$x = 31 \pm 17;\ x_1 = 48\ см,\ x_2 = 14\ см.$$

Итак, один катет — 48 *см*, второй — 14 *см*.

789. Пусть $AB = a$, $CD = b$, радиус круга O обозначим через R, круга O_1 — через r.

Соединим центры прямой OO_1. Проведем в точки касания радиусы OA, O_1B, OC, O_1D; прямую AF — параллельно линии центров до пересечения с продолженным радиусом O_1B; прямую OE, параллельную внутренней касательной CD, до встречи с продолженным радиусом O_1D.

В прямоугольном тр-ке AFB катет $BF = O_1F - O_1B = OA - O_1B = R - r$, катет $AB = a$, гипотенуза $AF = OO_1$. Имеем: $AF^2 = AB^2 + BF^2 = a^2 + (R-r)^2$.

В прямоугольном тр-ке OO_1E гипотенуза $OO_1 = AF$, катет $OE = CD = b$, катет $O_1E = DE + O_1D = OC + O_1D = R + r$. Имеем: $OO_1^2 = OE^2 + O_1E^2$, или $a^2 + (R-r)^2 = b^2 + (R+r)^2$, откуда

$$a^2 - b^2 = 4Rr = 2R \cdot 2r.$$

790. Сторона правильного вписанного 15-угольника стягивает дугу $\frac{360°}{15} = 24°$. Рассматриваем дугу, как разность $60° - 36° = 24°$.

Отложим последовательно дуги $AB = 24°$ и $BC = 36°$. Дуга $ABC = 24° + 36° = 60°$. Проведем диаметр DC и хорды AB, BC, AC, AD и BD. В полученном 4-угольнике $ABCD$ стороны: $AB = x$; $BC = a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (BC стягивает дугу $36° = \frac{360°}{10}$); $DC = 2r$; $AD = a_3 = r\sqrt{3}$ (дуга AD равна разности полуокружности и дуги ABC, т.-е. $180° - 60° = 120°$); диагонали: $AC = a_6 = r$,

$$DB = \sqrt{DC^2 - BC^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Применяя Птоломееву теорему, напишем: $AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot DB$ или $x \cdot 2r + \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot r\sqrt{3} = r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, откуда

$$x = \frac{r}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

791. Опустив высоту BF на сторону AC, заметим, что прямоугольные тр-ки DGE и BGF подобны, так как $\angle BGF = \angle EGD$, как вертикальные.

Из их подобия имеем: $\frac{DE}{BF} = \frac{GD}{GF}$. Определим BF, GD и GF.

Высота BF найдется из формулы: $\frac{AC \cdot BF}{2} = S$, где $AC = 14$ *см*; площадь же S определим по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, при чем $p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$ *см*, т.-е.

$$S = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ см}^2.$$

Итак, $\frac{14 \cdot BF}{2} = 84$ *см*, откуда $BF = 12$ *см*. Отрезок $GD = AD - AG$; $AD = \frac{AC}{2} = \frac{14}{2} = 7$ *см*; AG определится из пропорции (свойство биссектрисы) $\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{BC}$, или, заметив, что $GC = AC - AG = 14$ *см* $- AG$, $AB = 13$ *см*, $BC = 15$ *см*, перепишем: $\frac{AG}{14 - AG} = \frac{13}{15}$, откуда и определим $AG = \frac{13}{2}$ *см*. Итак, $GD = AD - AG = 7 - \frac{13}{2} = \frac{1}{2}$ *см*.

Отрезок $GF = AG - AF$; но $AG = {}^{13}/_{2}$ *см* (определено выше), а AF определится, как катет прямоугольного тр-ка ABF, у которого катет $BF = 12$ *см* (определено выше), а гипотенуза $AB = 13$ *см*, т.-е. $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ *см*.

Итак, $GF = AG - AF = {}^{13}/_{2} - 5 = {}^{3}/_{2}$ *см*.

Подставим числовые значения в пропорцию $\frac{DE}{BF} = \frac{GD}{GF}$, именно $DE : 12 = {}^1/_2 : {}^3/_2$, откуда $DE = 4$ *см*.

792. Хорда AB, стягивающая дугу 30°, есть сторона правильного вписанного 12-угольника и равна (зад. 530_2) $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Хорда BC, стягивающая дугу 90°, есть сторона вписанного квадрата и равна $r\sqrt{2}$. Хорда AC, стягивающая дугу ABC, равную 120° (сумме дуг AB и BC), есть сторона правильного вписанного тр-ка. и равна $r\sqrt{3}$.

Площадь тр-ка ABC определим из формулы $R = \frac{abc}{4S}$, откуда $S = \frac{abc}{4R}$, т. е. $S = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot r\sqrt{2}\cdot r\sqrt{3}}{4r} =$

$= \frac{r^2}{4}\sqrt{12-6\sqrt{3}}$, или $S = \frac{r^2}{4}(3-\sqrt{3})$ (зад. 530, указание).

793. Пусть $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$. Если положить $AB = a$, $BC = x$, тогда $AC = a - x$, и пропорция перепишется так: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Получаем квадратное уравнение $x^2 + ax - a^2 = 0$, решив которое, найдем $BC = x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, $AC = a - x = a - \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$.

Площадь фигуры $AKBNCMA$ состоит из суммы площадей двух полукругов AKB и CNB без площади полукруга AMC.

Площадь фигуры $BNCMALB$ равна сумме площадей полукругов AMC и ALB без площади полукруга BNC.

Площадь круга равна $\frac{\pi a^2}{4}$.

Площадь фигуры $AKBNCMA$ равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{4}(3-\sqrt{5})^2 =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Площадь фигуры $BNCMALB$ равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{4}(3-\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 -$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом соотношение частей площади круга $\frac{\pi a^2}{4}$ таково же, что и соотношение частей диаметра a.

† **794.** По теореме «суммы противоположных сторон описанного 4-угольника равны между собой», имеем: $BC + AD = AB + CD = 15 + 15 = 30$ *см*. Высота BE трапеции равна диаметру $KL = 8$ *см*. Из прямоугольного тр-ка BED имеем: $BD = \sqrt{BE^2 + ED^2}$; но $BE = 8$ *см*, а $ED = \frac{AD + BC}{2} = \frac{30}{2} = 15$ *см* (сумма оснований BC и AD состоит из 4 отрезков попарно равных $AE = FD$ и $BC = EF$; следовательно, отрезок $ED = EF + FD$ равен полусумме оснований). Итак, диагональ $BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ *см*. Круг, описанный около тр-ка ABD, пройдет и через вершину C трапеции, ибо: 1) около тр-ка ABD можно описать только одну окружность, а 2) описав окружность вокруг трапеции $ABCD$, мы тем самым опишем окружность и около тр-ка ABD.

Искомый радиус найдем по формуле $R = \frac{bc}{2h_a}$ (радиус окружности, описанной около тр-ка, равен произведению двух сторон его, деленному на двойную высоту, опущенную на третью сторону), т.-е. $R = \frac{AB \cdot BD}{2 \cdot BE} = \frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 8} = 15\frac{15}{16}$ *см*.

795. Пусть радиус круга — R, $\angle AOB = 150°$.

Опустим высоту AC на продолжение радиуса OB. В тр-ке AOC угол $AOC = 180° - 150° = 30°$; следовательно,

$$\text{катет } OC = \frac{OA}{2}\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3} \text{ (зад. 67).}$$

Из тупоугольного тр-ка AOB определим сторону AB по теореме: «квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, плюс удвоенное произведение основания на отрезок от вершины тупого угла до высоты», именно $AB^2 = OA^2 + OB^2 + 2OB \cdot OC$, или $AB^2 = R^2 + R^2 + 2R \cdot \frac{R}{2}\sqrt{3} = R^2(2 + \sqrt{3})$, откуда $AB = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Хорда $\smile 30°$ есть сторона правильного вписанного 12-угольника, как стягивающая дугу в $\frac{1}{12}$ окружности, и равна (зад. 530$_2$) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Следовательно, хорда $\smile 150°$ без хорды $\smile 30° = R\sqrt{2 + \sqrt{3}} - R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, или $R \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - R \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$, а это есть выражение стороны вписанного квадрата, т.-е. хорды $\smile 90°$.

796. Пусть высота $AD = \smile AC = l$.

Площадь сектора равна половине произведения дуги на радиус; следовательно, площадь сектора $AOBC = \frac{\smile AB \cdot R}{2}$; площадь сегмента ABC равна разности площадей сектора $AOBC$ и тр-ка AOB, т.-е. $\frac{\smile AB \cdot R}{2} - \frac{OB \cdot AD}{2} = \frac{\smile AB \cdot R}{2} - \frac{R \cdot l}{2} = \frac{R}{2}(\smile AB - l)$.

Площадь сектора BOC равна $\frac{\smile BC \cdot R}{2} = \frac{(\smile AB - \smile AC)R}{2} = \frac{R}{2}(\smile AB - l)$.

Следовательно, площадь сегмента ABC равновелика площади сектора BOC.

Примечание. Высота AD меньше хорды AB (катет AD меньше гипотенузы AB), а хорда AB меньше дуги AB; следовательно, дуга AC, равная по длине прямой AD, меньше дуги AB, и точка C лежит между точками A и B.

797. Продолжим AB и CD до взаимного пересечения в точке E.

Пусть площадь тр-ка $EBC - P$, трапеции $BMNC - nx$, трапеции $AMND - mx$, $BC = b$, $AD = a$, $MN = y$.

Площадь тр-ка MEN равна $P + nx$, тр-ка AED равна $P + mx + nx$.

Тр-ки MEN и BEC подобны; из их подобия вытекает пропорция $\frac{P + nx}{P} = \frac{y^2}{b^2}$; производная пропорция будет $\frac{P + nx - P}{P} = \frac{y^2 - b^2}{b^2}$, или $\frac{nx}{P} = \frac{y^2 - b^2}{b^2}$ (1).

Тр-ки AED и BEC подобны, и из их подобия следует: $\frac{P + mx + nx}{P} = \frac{a^2}{b^2}$, а производная пропорция будет:

$$\frac{P + mx + nx - P}{P} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \text{ или } \frac{mx + nx}{P} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (2).$$

Разделив производную пропорцию (2) на (1), получим по упрощении: $\frac{m + n}{n} = \frac{a^2 - b^2}{y^2 - b^2}$

Перепишем равенство так:

$$y^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)n}{m + n}, \text{ откуда } y = \sqrt{\frac{na^2 + mb^2}{m + n}}.$$

798. Пусть искомый радиус — r.

Проведем радиус O_1E в точку касания. В прямоугольном тр-ке EO_1B угол $EBO_1 = 30°$ ($\angle ABC = 60°$), катет $EO_1 = r$, гипоте-

нуза $BO_1 = BD - O_1D$. Высота BD равна $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (как высота равностороннего тр-ка). Отрезок O_1D состоит из двух отрезков: из O_1K и KD; O_1K определяется, как высота равностороннего тр-ка $O_1O_2O_3$, стороны которого O_1O_2, O_1O_3 и O_2O_3 равны каждый $2r$, т.-е. $O_1K = \frac{2r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$; отрезок KD равен радиусу круга O_2L, т.-е. равен r. Итак,

$$BO_1 = BD - O_1D = BD - (O_1K + KD) = \frac{a}{2}\sqrt{3} - (r\sqrt{3} + r) =$$

$$= \frac{a\sqrt{3} - 2r\sqrt{3} - 2r}{2}.$$

Из прямоугольного тр-ка EO_1B, с острым углом $EBO_1 = 30°$, имеем (зад. 67): $EO_1 = \frac{BO_1}{2}$, или $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3} - 2r\sqrt{3} - 2r}{2}$,

откуда $r = \frac{a\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{a}{4}(\sqrt{3}-1)$.

799. Площадь фигуры $BDME$ (заштриховано) равна площади сектора $ADME$ без суммы ромба $AOBO_1$ и двух секторов ODB и O_1BE.

В ромбе $AOBO_1$ диагональ $OO_1 = r$; следовательно, $OC = O_1C = \frac{r}{2}$, а потому в прямоугольном тр-ке AOC, в котором гипотенуза $AO = r$, а катет $OC = \frac{r}{2}$, угол $OAC = 30°$; значит $\angle OAO_1 = 60°$, $\angle AOB = 120°$, и диагональ $AB = a_3 = r\sqrt{3}$.

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$\frac{OO_1 \cdot AB}{2} = \frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{2}\sqrt{3}.$$

Площадь сектора ODB, у которого дуга $DB = 60°$ (так как угол $DAM = 30°$ и измеряется половиной дуги DB), равна $\pi r^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$; сумма площадей равных секторов ODB и O_1BE равна $2 \cdot \frac{\pi r^2}{6}$ или $\frac{\pi r^2}{3}$.

Площадь сектора $ADME$, радиус которого AD равен диаметру круга $2r$, а угол $DAE = 60°$ (выведено выше), равна

$$\pi \cdot (2r)^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi r^2.$$

Итак, площадь (заштриховано) фигуры $BDME$ равна

$$\frac{2}{3}\pi r^2 - \left(\frac{r^2}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi r^2}{3}\right) = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2}{2}\sqrt{3}.$$

Площадь сегмента $AKDB$ равна площади сектора $OAKDB$ плюс площадь тр-ка AOB. Площадь сектора $OAKDB$ равна $\frac{2}{3}\pi r^2$ (дуга $AKDB$ равна 240°, так как—указано выше — угол AOB, а, значит, и дуга AO_1B равны 120°); площадь тр-ка AOB равна половине площади ромба: $\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2}\sqrt{3} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Значит, площадь сегмента $AKDB$ равна $\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Искомая площадь овала состоит из 2-х равных фигур $BDME$ и $ANPQ$ и двух равных сегментов $AKDB$ и $ALEB$, т.-е.

$$2\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2}{2}\sqrt{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r}{4}\sqrt{3}\right) = 2\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Периметр овала состоит из двух равных дуг QKD и NLE, содержащих по 120° ($\angle QOD = \angle AOB = 120°$), и двух равных дуг DME и QPN с радиусом $2r$, т. к. радиус дуги $BQ = 2r$, и дугой 60°, т. к. центр. угол $QBN = 60°$, т.-е. $2\cdot\frac{2\pi r}{3} + 2\cdot\frac{2\pi\cdot 2r}{6} = \frac{8}{3}\pi r$.

800. Площадь 4-угольника состоит из площадей ABC и ACD, определяемых по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Площадь тр-ка ABC $\left(p = \frac{48+57+63}{2} = 84\right)$ равна

$$S_1 = \sqrt{84(84-48)(84-57)(84-63)} = \sqrt{84\cdot 36\cdot 27\cdot 21} = 756\sqrt{3}.$$

Площадь тр-ка ACD $\left(p = \frac{63+80+73}{2} = 108\right)$ равна

$$S_2 = \sqrt{108(108-63)(108-80)(108-73)} = \sqrt{108\cdot 45\cdot 28\cdot 35} = 1260\sqrt{3}.$$

Площадь 4-угольника $ABCD$ равна

$$S_1 + S_2 = 756\sqrt{3} + 1260\sqrt{3} = 2016\sqrt{3}.$$

Для определения диагонали BD проведем перпендикуляры BE и DF к AC, а DG — параллельно AC.

Высота BE определится из равенства

$$\frac{AC\cdot BE}{2} = S_1, \text{ или } \frac{63\cdot BE}{2} = 756\sqrt{3}, \text{ откуда } BE = 24\sqrt{3}.$$

Высота DF определится из равенства

$$\frac{AC \cdot DF}{2} = S_2, \text{ или } \frac{63 \cdot DF}{2} = 1260\sqrt{3}, \text{ откуда } DF = 40\sqrt{3}.$$

Искомая диагональ BD определится, как гипотенуза прямоугольного тр-ка BGD, у которого катет $BG = BE + EG = BE + DF = 24\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$, а катет $GD = EF = AF - AE$.

Отрезок $AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{80^2 - 40^2 \cdot 3} = 40$,

отрезок $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{48^2 - 24^2 \cdot 3} = 24$.

Значит, $GD = AF - AE = 40 - 24 = 16$.

Итак, диагональ $BD = \sqrt{BG^2 + GD^2} = \sqrt{64^2 \cdot 3 + 16^2} = \sqrt{16^2 \cdot 4^2 \cdot 3 + 16^2} = \sqrt{16^2(4^2 \cdot 3 + 1)} = \sqrt{16^2 \cdot 49} = 16 \cdot 7 = 112$.

Примечание. Угол $BAC = 60°$, так как $AB = 48$ вдвое больше катета $AE = 24$. Угол $CAD = 60°$, так как $AD = 80$, а катет $AF = 40$ (зад. 67).

801. Проведя хорды AD и BC, получим тр-ки AMD и BMC подобные, так как $\angle M$ — общий, а углы CAD и DBC равны, как вписанные в одну дугу CD.

Из подобия этих тр-ков имеем:

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AD} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{AB^2 - BD^2}} = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{\sqrt{25^2 - 15^2}} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}.$$

Пусть $MC = 6x$, $MD = 5x$; $AM = AC + MC = 7 + 6x$. Из прямоугольного тр-ка AMD (угол ADM, как смежный прямому углу ADB, прямой) имеем: $AM^2 = AD^2 + MD^2$; $(AD^2 = 25^2 - 15^2 = 400)$, или $(7 + 6x)^2 = 400 + (5x)^2$. Перепишем ур-ие в окончательном виде:

$11x^2 + 84x - 351 = 0$, откуда $x = 3$; $CM = 6x = 18$; $DM = 5x = 15$.

802. Опустим высоту DE; так как $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 75° - 60° = 45°$, то прямоугольный тр-к равнобедренный, и $AB = BE\sqrt{2}$. Из прямоугольного тр-ка BEC, с углом $C = 60°$, имеем (зад. 67): $BE = \frac{BC}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$AB = BE\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Сторона $AC = AE + EC$; но $AE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $EC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ (зад. 67). Следовательно, $AC = AE + EC = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

803. Пусть основания $AB = b$, $CD = a$, $AC = BD = m$. По свойству описанного 4-угольника, $AB + CD = AC + BD$, или $a + b = 2m$, откуда $AC = m = \frac{a+b}{2}$. Опустим высоту AE.

Отрезок $CE = FD = \frac{CD - EF}{2} = \frac{CD - AB}{2} = \frac{a-b}{2}$.

Из прямоугольного тр-ка ACE имеем:

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Но катет AE равен диаметру; следовательно, диаметр круга, вписанного в равнобедренную трапецию, есть средняя пропорциональная между основаниями.

804. Дуга $CAKBD$ равна $180° - n°$.

Искомая площадь части круга равна разности сегментов $CAKBD$ и AKB.

Проведя диаметр DE и хорду CE, видим, что дуга EC равна 180° без дуги $CAKBD$, т.-е. $180° - (180° - n°) = n°$, или дуге AKB; следовательно, искомая площадь равна разности сегментов CKD и CME.

Площадь сегмента CKD равна площади сектора $OCKD$ без площади тр-ка OCD.

Площадь сегмента CME равна площади сектора $OCME$ без площади тр-ка OCE.

Искомая площадь равна: пл. сектора $OCKD$ — пл. тр-ка OCD — — (пл. сектора $OCME$ — пл. тр-ка OCE) = пл. сектора $OCKD$ — пл. сектора $OCME$ — пл. тр-ка OCD + пл. тр-ка OCE.

Но площади тр-ков OCD и OCE равны, ибо у обоих равные основания $OD = OE = r$ и общая высота (ибо у них общая вершина).

Итак, искомая разность сегментов CKD и CME равна разности секторов $OCKD$ и $OCME$, т.-е.

$$\pi r^2 \cdot \frac{180° - n°}{360°} - \frac{\pi r^2 \cdot n°}{360°} = \pi r^2 \cdot \frac{90 - n}{180}.$$

805. Пусть прямой угол разделен прямыми AD и AE на равные углы, т.-е. $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC = \frac{90°}{3} = 30°$.

Тр-ки BAD и EAC равны, так как $AB = AC$ (по условию), $\angle B = \angle C = 45°$, а $\angle BAD = \angle EAC = 30°$. Следовательно, $BD = EC$.

Так как катеты $AB = AC$, а гипотенуза $BC = a$, то $AB = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Опустим перпендикуляр EF на катет AC. Прямоугольный тр-к EFC равнобедренный, ибо $\angle C = 45°$.

Обозначим $EF = FC = x$, тогда искомая $EC = x\sqrt{2}$.

Из прямоугольного тр-ка AEF, где катет $EF = x$, а $\angle EAF = 30°$, имеем (зад. 67): $AF = EF\sqrt{3} = x\sqrt{3}$.

Прямая $AC = AF + FC = x\sqrt{3} + x = x(\sqrt{3} + 1)$.

Следовательно, $x(\sqrt{3} + 1) = \frac{a}{\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$,

а искомая $EC = x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} =$

$= \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$; значит, и $BD = EC = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Величина $DE = BC - (BD + EC) = a - a(\sqrt{3} - 1) = a(2 - \sqrt{3})$.

806. Докажем раньше, что $MD = CD$.

Угол DMC (составлен двумя пересекающимися хордами KD и AC) измеряется полусуммой дуг $AK = 90°$ и BC; угол MCD (составленный касательной CD и хордой AC) измеряется половиной дуги ABC или полусуммой дуг $AB = 90°$ и BC (дуга ABC состоит из 2 дуг — AB и BC). Следовательно, углы DMC и MCD равны, а потому (в тр ке MCD) равны и прямые MD и CD.

Пусть $MD = CD = x$.

Проведем радиус OC в точку касания. В прямоугольном тр-ке ODC катеты $OC = r$, $CD = x$, гипотенуза $OD = OM + MD =$

$= \frac{r}{2} + x$. Имеем: $OC^2 + CD^2 = OD^2$, или $r^2 + x^2 = (\frac{r}{2} + x)^2$; последнее ур-ие упростим и получим $x = {}^3/_4 r$.

Искомая $OD = OM + MD = \frac{r}{2} + x = \frac{r}{2} + \frac{3}{4}r = \frac{5}{4}r$.

807. В n-угольнике всех секторов n. Пусть искомый радиус секторов — r. Дуга (угол) каждого сектора равна $\frac{2dn - 4d}{n}$ (сумма n углов правильного n-угольника равна $2dn - 4d$). Следовательно, площадь одного сектора (по формуле $S = \frac{\pi r^2 . n^\circ}{360^\circ}$) равна $\frac{\pi r^2}{4d} \cdot \frac{2dn - 4d}{n}$; сумма площадей всех n секторов равна

$$n \cdot \frac{\pi r^2}{4d} \cdot \frac{2dn - 4d}{n} = \frac{\pi r^2 (n - 2)}{2}.$$

Радиус круга, касающегося секторов, $OK = OA - AK = R - r$. Площадь этого круга равна $\pi(R-r)^2$.

Составим равенство: $\frac{\pi r^2(n-2)}{2} = \pi(R-r)^2$, или, сократив обе части равенства на π и извлекши квадратный корень,—

$$r\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{2}} = R - r, \text{ откуда } r = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{n-2}+\sqrt{2}}.$$

При 1) $n=4$, $r=\frac{R}{2}$; 2) $n=10$, $r=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}=$

$=\frac{R\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{R}{3}$; 3) $n=20$, $r=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{18}+\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{R}{4}$.

808. 1-й способ. Построим $\angle ABE = \angle BAE = 15°$; получим равнобедренный тр-к ABE, у которого $BE = AE$. Угол BEO, как внешний, равен $\angle BAE + \angle ABE = 15° + 15° = 30°$. В прямоугольном тр-ке BEO, с острым углом $BEO = 30°$, гипотенуза $BE = 2 \cdot BO$ (зад. 67); но $BO = \frac{BD}{2}$, следовательно, $BE = 2 \cdot \frac{BD}{2} = BD$, т.-е. меньшей диагонали.

Обозначим сторону ромба через a, бóльшую диагональ $AC = D$, меньшую $BD = d$; тогда и $BE = BD = d$.

Равнобедренные тр-ки ABC и ABE, имеющие одинаковые углы (15°, 15°, 150°), — подобны, и из подобия их следует:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AE}, \text{ или } \frac{D}{a} = \frac{a}{d}.$$

2-й способ. Если опишем окружность из вершины A, как из центра, радиусом $AB = a$, то BD будет стороной правильного вписанного 12-угольника ($30° = {}^1/_{12} \cdot 360°$). По зад. 530_2,

$$a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}, \text{ т.-е. } BD = a\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (1).$$

Если опишем окружность из вершины B, как из центра, то AC будет хордой, стягивающей дугу в 150°, равную (зад. 795) $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т.-е. $AC = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (2).

Перемножив равенства (1) и (2), получим $BD \cdot AC = a^2$, т.-е. $Dd = a^2$, или $\frac{D}{a} = \frac{a}{d}$.

809. Пусть $\frac{AC}{FG} = \frac{m}{n}$; но $FG = DE$; следовательно, $\frac{AC}{DE} = \frac{m}{n}$, или $\frac{DE}{AC} = \frac{n}{m}$.

Опустим высоту BL на основание AC. Тр-ки ABC и BDE подобны, так как $DE \parallel AC$. Из подобия их имеем: $\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC}$, или, обозначая BK через h, $BL = H$, перепишем: $\frac{h}{H} = \frac{n}{m}$; составим из последней пропорции производную пропорцию, вычтя каждую часть равенства из 1; получим $1 - \frac{h}{H} = 1 - \frac{n}{m}$, или $\frac{H-h}{H} = \frac{m-n}{m}$, или $\frac{KL}{BL} = \frac{m-n}{m}$.

Площадь параллелограма равна $FG \cdot KL$, или $DE \cdot KL$; площадь тр-ка $ABC = \frac{AC \cdot BL}{2}$. Отношение их площадей равно

$$DE \cdot KL : \frac{AC \cdot BL}{2} = 2 \cdot \frac{DE \cdot KL}{AC \cdot BL} = 2 \cdot \frac{DE}{AC} \cdot \frac{KL}{BL} = 2 \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m-n}{m} = \frac{2n(m-n)}{m^2}$$

810. Пусть $AB = 13$ *см*, $AC = 14$ *см*, $BC = 15$ *см*.

Опустим высоту BL и определим величину ее.

Площадь тр-ка ABC равна: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, или

$$S = \frac{AC \cdot BL}{2} = \frac{14 \cdot BL}{2} = 7 \cdot BL \text{ } см^2.$$

По формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, после подстановки $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$, получим $S = 84$ *см*^{2}.

Следовательно, $7 \cdot BL = 84$, откуда $BL = 12$ *см*. Отрезок $LC = \sqrt{BC^2 - BL^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ *см*.

Прямоугольные тр-ки BLC и EFH подобны, а потому напишем пропорцию: $\frac{HE}{LC} = \frac{FH}{BL}$, или $\frac{HE}{9} = \frac{7}{12}$, откуда $HE = \frac{21}{4}$ *см*.

Так как DEF равнобедренный тр-к, и высота делит основание пополам, имеем: $HE = \frac{DE}{2}$, откуда $DE = 2HE = \frac{21}{2}$ *см*.

Тр-ки ABC и BED подобны, так как $DE \parallel AC$, а потому имеем пропорцию: $\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC}$, или $\frac{BK}{12} = \frac{21}{2 \cdot 14}$, откуда $BK = 9$ *см*.

Искомое расстояние между основаниями тр-ков

$$KL = BL - BK = 12 - 9 = 3 \text{ } см.$$

811. В подобных многоугольниках углы равны, а сходственные стороны пропорциональны. В данном случае, когда даны

ромбы, нужно доказать что углы равны (ибо отношение сторон— величина постоянная для двух ромбов). Рассматривая 4-угольник $AOBK$, у которого $\angle OAK$ и $\angle OBK$ прямые, заключаем, что $\angle AKB + \angle AOB = 2d$ (сумма углов 4-угольника равна $4d$). Но угол AOB равен углу RPQ ромба внутреннего; следовательно, угол внутреннего ромба $MKP = 2d - \angle RPQ$ равен углу внешнего ромба $AKB = 2d - \angle AOB$. Значит, углы ромбов равны, а потому ромбы подобны.

Площади подобных многоугольников пропорциональны квадратам сходственных сторон. В подобных ромбах стороны пропорциональны высотам (доказать легко, опустив высоты и сравнив отрезанные подобные прямоугольные тр-ки); следовательно, площади подобных ромбов пропорциональны квадратам высот.

Сторона внутреннего ромба равна половине диагонали прямоугольника (что следует из подобия тр-ков ACB и ARM), т.-е. $RP = {}^1/_2 \sqrt{a^2+b^2}$.

Площадь внутреннего ромба равна $RP \cdot MS = {}^1/_2 \sqrt{a^2+b^2} \cdot MS$ (MS — высота ромба). С другой стороны, площадь ромба равна половине произведения диагоналей (зад. 594). Диагонали же внутреннего ромба MP и RQ равны сторонам a и b прямоугольника. Следовательно, площадь внутреннего ромба равна $\frac{ab}{2}$.

Итак, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot MS = \frac{ab}{2}$, откуда $MS = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Высотой внешнего ромба будет диагональ прямоугольника, равная $\sqrt{a^2+b^2}$.

Отношение площадей этих ромбов равно

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 : (\sqrt{a^2+b^2})^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

812. Получились 4 фигуры: $AMB = CMD$, BMC и $AMDK$.

Площадь фигуры AMB равна площади фигуры ADB без площади тр-ка AMD, площадь же фигуры ADB равна сумме площадей сектора AOB и тр-ка BOD.

Итак, площадь фигуры AMB = пл. сектора AOB + пл. тр-ка BOD — пл. тр-ка AMD.

Площадь сектора AOB, у которого дуга $AB = 60°$, равна $\pi r^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi r^2}{6}$; площадь равнобедренного тр-ка BOD, у которого $\angle BOD = 120°$, равна $\frac{BD \cdot OK}{2} = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} \quad \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$

($BD = a_3 = r\sqrt{3}$, как хорда, стягивающая дугу $BCD = 120°$, а OK — апофема правильного вписанного тр-ка, равная $\frac{r}{2}$); площадь тр-ка AMD, у которого угол $AMD = 120°$, найдем из сравнения площадей подобных равнобедренных тр-ков AMD и BOD (ибо у обоих угол при вершине 120°), относящихся между собой, как квадраты сходственных сторон: $\frac{\text{пл. } AMD}{\text{пл. } BOD} = \frac{AD^2}{BD^2}$, или пл. $AMD : \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = 4r^2 : 3r^2$, откуда площадь тр-ка $AMD = \frac{r^2}{3}\sqrt{3}$.

Окончательно:

площадь фигуры $AMB = \frac{\pi r^2}{6} + \frac{r^2}{4}\sqrt{3} - \frac{r^2}{3}\sqrt{3} = \frac{r^2}{12}(2\pi - \sqrt{3})$.

Значит, и площадь фигуры $CMD = \frac{r^2}{12}(2\pi - \sqrt{3})$.

Площадь фигуры BMC равна площади полуокружности $ABCD$ без площадей фигур AMB и CMD и тр-ка AMD, т.-е.

$$\frac{1}{2}\cdot\pi r^2 - \left[2\cdot\frac{r^2}{12}(2\pi - \sqrt{3}) + \frac{r^2}{3}\sqrt{3}\right] = \frac{r^2}{6}(\pi - \sqrt{3}).$$

Площадь фигуры $AMDK_1$ равна сумме площадей полуокружности AKD и тр-ка AMD, т. е. $\frac{1}{2}\cdot\pi r^2 + \frac{r^2}{3}\sqrt{3} = \frac{r^2}{6}(3\pi + 2\sqrt{3})$.

813. Пусть $ML : KL = m : n$, $AB = CD = a$, $BC = AD = b$; диагонали $BD = AC = D$ (в прямоугольнике диагонали равны). Из подобия тр-ков CLM и CBD имеем: $\frac{BC}{CL} = \frac{CD}{ML}$ (1). Из подобия тр-ков BKL и ABC имеем: $\frac{BC}{BL} = \frac{AC}{KL}$, или $\frac{BC}{BL} = \frac{BD}{KL}$ (2). Разделив равенство (2) на (1), получим: $\frac{CL}{BL} = \frac{ML}{KL} = \frac{m}{n}$, т.-е. сторона BC разделилась вершиной L на части в отношении $m : n$.

Таким же образом, в первом случае можно написать $\frac{CD}{CM} = \frac{BD}{ML}$ (1) и во втором (из подобия тр-ков ACD и MND) — $\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{MN}$, или $\frac{CD}{MD} = \frac{BD}{MN}$ (2). Разделив равенство (2) на (1), получим

$$\frac{CM}{MD} = \frac{ML}{MN} = \frac{m}{n}.$$

Составляя производные пропорции из пропорций $\frac{CL}{BL}=\frac{m}{n}$ и $\frac{CM}{MD}=\frac{m}{n}$, получим (напр., $\frac{CL+BL}{BL}=\frac{m+n}{n}$ или $\frac{b}{BL}=\frac{m+n}{n}$):

$$CL=\frac{bm}{m+n},\ BL=\frac{bn}{m+n},\ CM=\frac{am}{m+n},\ MD=\frac{an}{m+n}.$$

Искомая площадь параллелограма $KLMN$ равна площади прямоугольника $ABCD=ab$, без площадей тр-ков:

$$BKL=\frac{1}{2}\cdot\frac{an}{m+n}\cdot\frac{bn}{m+n}=\frac{abn^2}{2(m+n)^2},\ MND=\frac{abn^2}{2(m+n)^2},$$

$$LCM=\frac{1}{2}\cdot\frac{bm}{m+n}\cdot\frac{am}{m+n}=\frac{abm^2}{2(m+n)^2}\text{ и }KAN=\frac{abm^2}{2(m+n)^2}.$$

Искомая площадь равна, следовательно,

$$ab-\left[\frac{abn^2}{(m+n)^2}+\frac{abm^2}{(m+n)^2}\right]=ab\cdot\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

814. Пусть $AB=c$, $BC=b$, $CD=d$, $AD=a$. Проведем, $BE\parallel CD$; получим тр-к со сторонами $AB=c$, $BE=CD=d$ $AE=AD-ED=AD-BC=a-b$.

Определим площадь тр-ка ABE по формуле $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{c+d+a-b}{2}$; получим:

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{(c+d+a-b)(d+a-b-c)(c+a-b-d)(c+d-a+b)}\ (1).$$

Эта площадь равна $\frac{AE\cdot BK}{2}=\frac{a-b}{2}\cdot BK$. Имеем:

$S=\frac{a-b}{2}\cdot BK$, откуда $BK=\frac{2S}{a-b}$. Искомая площадь трапеции:

$$\frac{AD+BC}{2}\cdot BK=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2S}{a-b}=$$

$$=\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(c+d-a+b)}.$$

815. По условию, $OD=O_1D$ и $AD=DC$, т.-е. 4-угольник $AOCO_1$ — ромб, и углы $O_1CD=OCD=OAD=O_1AD$, обозначим их через α. Но DC и BC — касательные к окружности O_1; следовательно, и $BCO_1=O_1CD=\alpha$, и $BAO_1=O_1AD=\alpha$.

Пусть искомый угол $B=\beta$, тогда дуга $AKC=2\beta$ (угол β — вписанный), дуга же $ABC=360°-2\beta$, т.-е. угол $AOC=360-2\beta$. Углы тр-ка ABC равны $\beta+4\alpha$ ($\angle B=\beta$, $\angle A=\angle BAO_1+\angle O_1AD=2\alpha$, $\angle C=\angle BCO_1+O_1CD=2\alpha$), т.-е. $\beta+4\alpha=180°$ (1). Углы тр-ка

AOC равны $360°-2\beta+2\alpha$ ($\angle AOC=360°-2\beta$, $\angle DAO=\alpha$, $\angle DCO=\alpha$), т.-е. $360°-2\beta+2\alpha=180°$, или $\beta-\alpha=90°$(2).

Из ур-ий (1) и (2) определяем искомое β (угол A), а именно: $\beta=108°$.

816. Дано: $AC=l$, $BD=m$ и пусть сторона ромба a. Тр-ки ABC и NBK подобны, ибо $AC \parallel NK$.

Из подобия их имеем: $\frac{NK}{AC}=\frac{BK}{BC}$. Из подобия тр-ков BCD и KCL (ибо $BD \parallel KL$) имеем: $\frac{KL}{BD}=\frac{KC}{BC}$. Сложим эти пропорции почленно: $\frac{NK}{AC}+\frac{KL}{BD}=\frac{BK+KC}{BC}$; но $NK=a$, $AC=l$, $KL=a$, $BD=m$, $BK+KC=BC$; следовательно, сумма пропорций перепишется так: $\frac{a}{l}+\frac{a}{m}=\frac{BC}{BC}=1$, откуда $a=\frac{lm}{l+m}$.

817. Пусть $AK=MC=nx$, $KD=BM=mx$, $AL=my$, $BL=ny$. Через вершину L вписанного параллелограма проведем высоту QP, которая вершиной L разделилась на отрезки QL (высота тр-ка BLM) и LP (высота тр-ка ALP). Прямоугольные тр-ки QBL и APL подобны, ибо $\angle QLB=\angle ALP$, как вертикальные, и из их подобия следует: $\frac{LP}{QL}=\frac{AL}{BL}=\frac{my}{ny}=\frac{m}{n}$.

Пусть $LP=mz$, $QL=nz$.

Площадь тр-ка $AKL=\frac{AK\,.\,LP}{2}=\frac{nx\,.\,mz}{2}=\frac{mnxz}{2}$.

Площадь тр-ка $LBM=\frac{BM\,.\,QL}{2}=\frac{mx\,.\,nz}{2}=\frac{mnxz}{2}$. Таким образом, очевидно, все 4 тр-ка равновелики и сумма площадей их равна $4\cdot\frac{mnxz}{2}=2mnxz$.

Площадь параллелограма $KLMN$ равна площади параллелограма $ABCD$ без суммы площадей 4 тр-ков, т.-е. равна $AD\,.\,PQ-2mnxz$. Но $AD=AK+KD=nx+mx=x(m+n)$, $PQ=LP+QL=mz+nz=z(m+n)$; площадь параллелограма $ABCD$ равна $AD\,.\,PQ=x(m+n)\,.\,z(m+n)=xz(m+n)^2$. Итак, искомое отношение площадей параллелограмов $KLMN$ и $ABCD$ равно:

$$\frac{xz(m+n)^2-2mnxz}{xz(m+n)^2}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

818. Проведем биссектрису BE угла ABD. Тогда $\angle EBD = \angle CBD$; следовательно, тр-к EBC, у которого высота делит угол при вершине пополам,—равнобедренный, и $ED = DC = 3$ *см*.

В тр-ке ABD, по теореме о биссектрисе, имеем пропорцию: $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$, или $\frac{AB}{6} = \frac{AE}{3}$, откуда $AB = 2AE$.

Пусть $AE = x$, тогда $AB = 2AE = 2x$.

Из прямоугольного тр-ка ABD имеем: $AB^2 = AD^2 + BD^2$; но $AB = 2x$, $AD = AE + ED = x + 3$ *см*, $BD = 6$ *см*. Равенство перепишется так: $(2x)^2 = (x+3)^2 + 6^2$, или, по упрощении, $x^2 - 2x - 15 = 0$. Решив это квадратное ур-ие, получим $x = 5$ *см*; искомая $AD = x + 3 = 8$ *см*.

819. Дано: $\angle ABD = 15°$; $DBC = 75°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 15° + 75° = 90°$. Значит, тр-к ABC — прямоугольный. В прямоугольном тр-ке BDC, у которого $\angle DBC = 75°$, угол $BCD = 90° - 75° = 15°$.

Пристроив к тр-ку BCD равный ему тр-к B_1CD, как указано на чертеже, получаем равнобедренный тр-к BCB_1 с углом $BCB_1 = 30°$ при вершине. Рассматриваем BB_1, как хорду круга, описанного из C, как из центра, радиусом, равным BC. По зад. 530_2, имеем $a_{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; но $a_{12} = BB_1 = 2BD = 2$ *см*, $r = BC$. Формула перепишется так: $2 = \frac{BC}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, откуда $BC = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Определяем отрезок DC, как катет прямоугольного тр-ка BCD, именно: $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. Гипотенуза AC тр-ка ABC равна:

$$AC = \frac{BC^2}{DC} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 4 \text{ см}.$$

Искомая площадь тр-ка $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$ *см*^{2}.

820. 1) Проведем $BE \parallel AD$ до пересечения с продолжением AC. Угол BAE, как смежный углу BAC, равен $180° - 120° = 60°$; угол AEB равен углу CAD, как соответственный, т.-е. 60°; следовательно, в тр-ке AEB и 3-й угол ABE равен 60°, т.-е. тр-к равносторонний, и $AE = BE = AB$.

Обозначим $AB = AE = BE = a$, $AC = b$; $EC = AE + AC = a + b$.

Вследствие параллельности прямых AD и BE имеем пропорцию:

$$\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{CE}, \text{ или } \frac{AD}{a}=\frac{b}{a+b}, \text{ откуда } AD=\frac{ab}{a+b}.$$

2) Проведем $BE \parallel DA$ до пересечения с продолжением катета AC.

Прямоугольный тр-к ABE равнобедренный, так как $\angle BEA = \angle DAC = 45°$. Следовательно, $AE = AB$.

Обозначим $AB = AE = a$, $AC = b$, $EC = AE + AC = a + b$, $BE = a\sqrt{2}$.

Вследствие параллельности прямых AD и BE, можем написать пропорцию: $\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{EC}$, или $\frac{AD}{a\sqrt{2}}=\frac{b}{a+b}$, откуда $AD=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

3) Проведем $BE \parallel DA$ до пересечения с продолжением AC.

Угол AEB равен углу DAC, как соответственный, т.-е. равен 30°; угол BAE равен $180° - 60° = 120°$, как смежный углу BAC. Следовательно, 3-й угол ABE тр-ка ABE равен $180° - 120° - 30° = 30°$; т.-е. тр-к ABE равнобедренный, и $AE = AB$.

Обозначим $AB = AE = a$, $AC = b$; $EC = AE + AC = a + b$; $EB = AB\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ (EB рассматриваем, как хорду круга радиуса AB, стягивающую дугу в 120° и равную, следовательно, $a_3 = AB\sqrt{3}$).

Вследствие параллельности прямых AD и BE, можем написать пропорцию: $\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{EC}$, или $\frac{AD}{a\sqrt{3}}=\frac{b}{a+b}$, откуда $AD=\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$.

821. Пусть $AD = a$, $BC = b$.

Рассматривая подобные тр-ки ABD и EOB, видим, что $\frac{EO}{AD}=\frac{BO}{BD}$ (1); а из подобия тр-ков ACD и OCF находим, что

$$\frac{OF}{AD}=\frac{CO}{AC} \quad (2).$$

Тр-ки AOD и BOC подобны, так как $\angle AOD = \angle BOC$, как вертикальные, $\angle BCO = \angle OAD$ и $\angle CBO = \angle ODA$, как накрест лежащие. Из подобия их следует: $\frac{DO}{BO}=\frac{AO}{CO}$, или, составив производную пропорцию, $\frac{DO+BO}{BO}=\frac{AO+CO}{CO}$, т.-е. $\frac{BD}{BO}=\frac{AC}{CO}$; последнюю пропорцию перепишем так: $\frac{BO}{BD}=\frac{CO}{AC}$. Значит, правые части равенств (1) и (2) равны между собой, а потому равны и

левые, именно $\frac{EO}{AD} = \frac{OF}{AD}$, откуда $EO = OF$, т.-е. прямая, проведенная через точки пересечения диагоналей параллельно основаниям, делится в этой точке пополам.

Тр-ки ODF и BCD подобны ($OF \parallel BC$), а потому напишем: $\frac{OF}{BC} = \frac{OD}{BD}$ (3). Сложим равенства (1) и (3) почленно:

$\frac{EO}{AD} + \frac{OF}{BC} = \frac{BO}{BD} + \frac{OD}{BD}$ и подставим вместо $EO = OF = x$, $AD = a$, $BC = b$; получим: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{BO + OD}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$.

Решив это ур-ие, найдем $x = \frac{ab}{a+b}$.

Искомая прямая $EF = EO + OF = 2x = \frac{2ab}{a+b}$.

Примечание. Формула $EF = \frac{2ab}{a+b}$ показывает, что при любой высоте трапеции, но при основаниях a и b прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей, всегда будет одной и той же длины — $\frac{2ab}{a+b}$, при чем точка пересечения диагоналей делит эту прямую пополам.

822. Четыреугольник $EGFH$ средней линией EF трапеции разбивается на 2 тр-ка EGF и EHF.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, $EF = \frac{a+b}{2}$.

Проведем через точки G и H высоты к трапеции $BEFC$ и $AEFD$; каждая из них, MN и LN, равна $\frac{h}{2}$, ибо расстояние между основаниями трапеции и ее средней линией равно половине высоты трапеции.

Рассмотрим тр-ки BGC и EGF. Они подобны, так как $\angle BGC = \angle EGF$, как вертикальные углы, $\angle GBC = \angle GFE$ и $\angle BCG = \angle GEF$ как накрест лежащие. Из их подобия следует:

$$\frac{GN}{GM} = \frac{EF}{AD}, \text{ или } \frac{GN}{GM} = \frac{a+b}{2} : b = \frac{a+b}{2b} \quad (1);$$

$$GN + GM = MN = \frac{h}{2} \quad (2).$$

Решив ур-ия (1) и (2), найдем: $GN = \frac{h}{2} \cdot \frac{a+b}{(a+3b)}$.

Подобным образом, вследствие подобия тр-ков AHD и EHF, найдем, что $HN = \frac{h}{2} \cdot \frac{a+b}{(3a+b)}$.

Площадь тр-ка EGF:

$$\frac{EF \cdot GN}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{a+b}{(a+3b)} = \frac{h}{8} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+3b)}.$$

Площадь тр-ка $EHF = \frac{EF \cdot HN}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{a+b}{3a+b} = \frac{h}{8} \cdot \frac{(a+b)^2}{(3a+b)}.$$

Искомая площадь 4-угольника $EGFH$ равна:

$$\frac{h}{8} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+3b)} + \frac{h}{8} \cdot \frac{(a+b)^2}{(3a+b)} = \frac{h}{2} \cdot \frac{(a+b)^3}{(a+3b)(3a+b)}.$$

823. Дано $BC = a = 20$, $AC = b = 15$, $\angle A - \angle B = 90°$.

Восставим перпендикуляр AD в вершине угла A к стороне AC. Тогда $\angle BAD = \angle A - 90° = \angle B$; следовательно, тр-к ABD равнобедренный, и $AD = BD$. Если обозначить $AD = BD = x$, то $DC = BC - BD = a - x = 20 - x$.

Из прямоугольного тр-ка ADC имеем: $AD^2 + AC^2 = DC^2$, или $x^2 + b^2 = (a-x)^2$; последнее ур-ие перепишется так: $2ax = a^2 - b^2$, откуда $x = \frac{a^2 - b^2}{2a} = \frac{20^2 - 15^2}{2 \cdot 20} = \frac{35}{8}$; $DC = 20 - x = 20 - \frac{35}{8} = \frac{125}{8}$;

$DC \cdot AE = AC \cdot AD$, или $(20 - x) \cdot AE = bx$, откуда $AE = \frac{bx}{20 - x} =$

$$= 15 \cdot \frac{35}{8} : \frac{125}{8} = \frac{21}{5}; \quad AD^2 = DC \cdot DE, \text{ откуда}$$

$$DE = \frac{AD^2}{DC} = \frac{x^2}{20 - x} = \left(\frac{35}{8}\right)^2 : \frac{125}{8} = \frac{49}{40}.$$

Искомая сторона AB определится из прямоугольного тр-ка ABE, именно: $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2}$; но $AE = \frac{bx}{20 - x} = \frac{21}{5}$; $BE = BD + DE = x + \frac{x^2}{20 - x} = \frac{35}{8} + \frac{49}{40} = \frac{224}{40} = \frac{28}{5}$; следовательно,

$$AB = \sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2} = 7.$$

824. Положим $AD = a$, $AB = b$.

1) Опустив высоту BO, заметим, что в прямоугольном тр-ке ABO катет BO лежит против угла A в 30°, а потому (зад. 67) равен $\frac{AB}{2}$, т.-е. $BO = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$.

Площадь параллелограма равна $AD \cdot BO = \frac{a \cdot b}{2}$.

2) Указание 1. Четыреугольник, образующийся от пересечения биссектрис параллелограма всегда прямоугольник. В самом деле. В тр-ке ABK угол AKB прямой, ибо сумма углов ABK и BAK, как полусумма углов A и B параллелограма (равных $2d$), равна d. Следовательно, и угол NKL 4-угольника $KLMN$ — прямой. Так же можно доказать, что и остальные углы 4-угольника $KLMN$ — прямые, т.-е. 4-угольник $KLMN$ — прямоугольник.

Указание 2. Прямоугольник может образоваться при условии, что $a \leqslant 2b$, ибо при $a > 2b$ биссектрисы AH и DG не пересекутся ($GC = DC = b$, $BH = AB = b$, а сторона $BC > 2b$).

Тр-к GDC — равнобедренный, так как $\angle CGD = \angle GDA$, как накрест лежащие, а $\angle GDA = \angle GDC$ (GD — биссектриса); следовательно, $\angle CGD = \angle GDC$, и прямые $CG = DC = b$.

Проведем $HP \parallel GD$; образуется равнобедренный тр-к HPC, ибо он подобен тр-ку GDC, с боковыми сторонами $PC = HC = BC - BH = a - b$ (из равнобедренного тр-ка ABH следует, что $BH = AB = b$; доказательство равнобедренности тр-ка ABH такое же, как и для тр-ка GDC).

Чтобы определить сторону LM прямоугольника $KLMN$, заметим, что HR (равная $\frac{HP}{2}$) $= LM$, как отрезки параллельных между параллельными.

Прямую HP рассматриваем, как хорду, стягивающую дугу в $30°$ в круге, описанном из вершины угла C, как из центра, радиусом равным $CG = CP$. Такая хорда есть a_{12} — сторона правильного вписанного 12-угольника, равная (зад. 530_2) $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, т.-е. $HP = (a-b)\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Сторона же прямоугольника $LM = HR = \frac{HP}{2} = \frac{a-b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Подобным образом, проведя $GQ \parallel AH$, определим GQ, как хорду, стягивающую дугу в $180° - 30° = 150°$, равную (зад. 796) $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$, т.-е. $GQ = (a-b)\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Сторона же прямоугольника $KL = GS = \frac{GQ}{2} = \frac{a-b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Искомая площадь прямоугольника $KLMN$:

$$KL \cdot LM = \frac{a-b}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{a-b}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

825. Так как $\angle ACB = \angle ADB = 120°$, то вершины их, точки C и D, лежат на одной окружности, ибо геометрическое место вершин равных углов, опирающихся на одну и ту же прямую, есть дуга окружности; если опишем окружность около 3 точек A, B и C ($\angle C = 120°$), то точка D, вершина угла $D = 120°$, будет лежать на той же окружности.

Периметр тр-ка ACB равен 104 *см*; следовательно, $AC + BC = 104 - AB = 104 - 49 = 55$ *см*. Пусть $AC = x$, $BC = 55 - x$.

Опустим высоту AE на продолжение BC. В прямоугольном тр-ке AEC угол $ACE = 180° - 120° = 60°$, $\angle CAE = 30°$, а потому (зад. 67) $EC = \frac{AC}{2} = \frac{x}{2}$.

Имеем равенство („квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, плюс удвоенное произведение основания на отрезок от вершины тупого угла до высоты"): $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot EC$, или $49^2 = x^2 + (55 - x)^2 + 2(55 - x) \cdot \frac{x}{2}$. Последнее ур-ие окончательно перепишется так: $x^2 - 55x + 624 = 0$. Решая это ур-ие, получим: $x_1 = 16$, $x_2 = 39$; т.-е. $AC = 16$ *см*, ибо по условию, $AC < BC$, а потому $x_2 = 39$ не подходит; $BC = 55 - 16 = 39$ *см*.

Таким же образом, опустив высоту BF и заметив, что $DF = \frac{BD}{2} = \frac{y}{2}$, а $AD = 56 - y$ ($BD + AD = 105 - 49 = 56$), составим квадратное ур-ие: $y^2 - 56y + 735 = 0$ ($AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot DF$).

Решив это ур-ие, получим: $y_1 = 21$, $y_2 = 35$, т.-е. $BD = 21$ *см*; второй корень не подходит; $AD = 56 - 21 = 35$ *см*.

Искомое расстояние CD определится по Птоломеевой теореме: $CD \cdot AB + AC \cdot BD = BC \cdot AD$, или $CD \cdot 49 + 16 \cdot 21 = 39 \cdot 35$, откуда $CD = \frac{39 \cdot 35 - 16 \cdot 21}{49} = 21$ *см*.

826. Если даны только две стороны тр-ка, а угол между ними не дается, то задача допускает 2 решения.

1-й случай. Угол A острый, $AC = b$, $AB = c$. Опустим высоту BD. Площадь тр-ка ABC равна $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot BD}{2}$; но, по условию, площадь равна $\frac{bc\sqrt{3}}{4}$; следовательно, $\frac{b \cdot BD}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$, откуда $BD = \frac{c}{2}\sqrt{3}$. По зад. 67, это возможно, когда $\angle A = 60°$, и, значит, $AD = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ (этот же результат получим, ко-

нечно, определяя $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$); $DC = AC - AD = b - \frac{c}{2}$. Искомая сторона BC определится из прямоугольного тр-ка BDC, именно: $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 + (b - \frac{c}{2})^2} = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$.

Сторону BC можно определить и по формуле: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$.

2-й случай. Угол A тупой, $AC = b$, $AB = c$. Опустим высоту BD на продолжение стороны AC. Площадь треугольника ABC равна $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot BD}{2}$; но зная, что площадь тр-ка равна $\frac{bc}{4}\sqrt{3}$, напишем: $\frac{b \cdot BD}{2} = \frac{bc}{4}\sqrt{3}$, откуда $BD = \frac{c}{2}\sqrt{3}$, что, по зад. 67, дает: $\angle BAC = 60°$; значит, $AD = \frac{c}{2}$ (или, по формуле: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$). Искомая сторона $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2}$; но $BD = \frac{c}{2}\sqrt{3}$; $DC = AC + AD = b + \frac{c}{2}$; следовательно,

$$BC = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + c^2 + bc}.$$

827. Имеем равенства: $\frac{ah_a}{2} = S$, $\frac{bh_b}{2} = S$, $\frac{ch_c}{2} = S$, откуда $a = 2S \cdot \frac{1}{h_a}$, $b = 2S \cdot \frac{1}{h_b}$, $c = 2S \cdot \frac{1}{h_c}$.

В формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ заменим:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right), \quad p - a = S\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right),$$

$$p - b = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right), \quad p - c = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right).$$

Получим $S = S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$,

откуда $S = 1 : \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$.

828. Пусть $AD = l$, $BE = m$, $CF = n$.

Продолжим AC в обе стороны и проведем $BG \parallel DA$ и $BH \parallel FC$; тогда $AG = AC$ (вследствие параллельности BG и DA,

$\frac{AG}{AC} = \frac{BD}{DC} = 1$, а $GB = 2AD = 2l$) и $CH = AC$ (а также $BH = 2FC = 2n$, по той же причине) и, следовательно, площадь $ABC = {}^1/_3$ площади GBH (ибо у обоих тр-ков общая вершина B, следовательно, и общая высота, а основание AC тр-ка ABC втрое меньше основания $GH = GA + AC + CH$ тр-ка GBH).

Чтобы определить площадь GBH, разрежем тр-к GBH по медиане BE и пристроим часть GBE так, чтобы GE совпала с EH; $\angle BEB_1$ будет прямой, так как $\angle GEB = \angle HEB_1$, а GEH — прямая (обратная теорема о равенстве вертикальных углов). Вновь полученный тр-к BB_1H имеет стороны $B_1H = 2l$, $BB_1 = 2m$, $BH = 2n$. Площадь его определим по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = l+m+n$; получим: $S = \sqrt{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}$. Искомая площадь тр-ка ABC:

$${}^1/_3\sqrt{(l+m+n)(m+n-l)(l+n-m)(l+m-n)}.$$

Полагая $\frac{l+m+n}{2} = q$, можем последнюю формулу переписать так: ${}^4/_3\sqrt{q(q-l)(q-m)(q-n)}$.

829. Пусть $AC = 42$ *см*, $AF = 30$ *см*, $CG = 51$ *см*. Проведем $BE \parallel GC$ и $BD \parallel AF$ до пересечения с продолжениями концов прямой AC.

Вследствие параллельности прямых GC и BE, тр-ки AGC и и ABE подобны и стороны их пропорциональны; а так как $AG = GB$, то и $CE = AC = 42$ *см*, а $BC = 2GC = 2 \cdot 51 = 102$ *см*. Из параллельности прямых BD и AF следует, по тому же соображению, что $DA = AC = 42$ *см* и $BD = 2AF = 2 \cdot 30 = 60$ *см*.

Таким образом площадь тр-ка BDE, имея общую с тр-ком ABC вершину B (следовательно, и общую высоту), а основание DE, равное тройному основанию AC тр-ка ABC, — втрое больше площади тр-ка ABC.

Площадь тр-ка DBE определяется по формуле:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 42 + 2 \cdot 51 + 2 \cdot 30}{2} = 144 \text{ см}; \text{ именно}$$

$$S = \sqrt{144(144-126)(144-102)(144-60)} = \sqrt{144 \cdot 18 \cdot 42 \cdot 84} = 3024 \text{ см}^2$$

Искомая площадь тр-ка ABC равна $\frac{3024}{3} = 1008$ *см*^{2}.

830. Так как дуга AM равна дуге MC, то и $\angle ABM = \angle CBM$, т.-е. BD есть биссектриса угла ABC.

Длина биссектрисы (зад. 695) $BD = \sqrt{AB \cdot BC - AD \cdot DC}$; но $AB = c = 240$, $BC = a = 375$; AD и DC определятся из пропорции $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, или (полагая $AD = x$, $DC = AC - AD = 492 - x$), $\frac{x}{492 - x} = \frac{240}{375}$; упростив последнее ур-ие, получим $41x = 16 \cdot 492$, откуда $x = 192$, т.-е. $AD = 192$, $DC = 492 - x = 300$.

Итак, биссектриса $BD = \sqrt{240 \cdot 375 - 192 \cdot 300} = 180$.

Отрезок DM определится из равенства (произведения отрезков хорд, пересекающихся в одной точке, равны между собой):

$$DM \cdot BD = AD \cdot DC, \text{ или } DM \cdot 180 = 192 \cdot 300, \text{ откуда}$$

$$DM = \frac{192 \cdot 300}{180} = 320.$$

Искомая хорда $BM = BD + DM = 180 + 320 = 500$.

831. Опустим из точки D перпендикуляр DF на диаметр AB и продолжим его до пересечения с окружностью в точке K. В прямоугольном тр-ке CDF угол DCF равен 45°, значит, и $\angle CDF = 45°$, а дуга EK равна 90°; следовательно, хорда EK, стягивающая дугу 90°, равна $r\sqrt{2}$, как сторона квадрата.

Тр-ки CFK и CFD равны между собой, так как катет OF у обоих общий, а $DF = FK$ (хорда DK, перпендикулярная к радиусу OB, делится пополам); следовательно, $\angle KCF = \angle DCF = 45°$, а $CK = CD$.

Угол DCK равен $\angle DCF + \angle KCF = 45° + 45° = 90°$; значит, и смежный ему угол ECK равен 90°.

Из прямоугольного тр-ка ECK имеем: $EC^2 + CK^2 = EK^2$, или $EC^2 + CD^2 = 2r^2$, т.-е. сумма квадратов отрезков хорды ED, образующей с диаметром угол 45°, равна квадрату стороны вписанного квадрата и, значит, равна постоянной величине.

832. 1-й способ. Дано $BC = a$, $AC = b$, $CD = t$.

Проведем $AE \parallel BC$. В тр-ке AEC $\angle AEC = \angle DCB$, как соответственные, а $\angle EAC = \angle ACD$, как накрест лежащие; но $\angle ACD = \angle DCB$, следовательно, и $\angle AEC = \angle EAC$; значит, и стороны тр-ка $EC = AC = b$.

Вследствие параллельности прямых AE и CD, имеем: $\frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BC}$, или $\frac{AE}{t} = \frac{a + b}{a}$ ($BE = BC + EC = a + b$), откуда $AE = \frac{t(a + b)}{a}$.

Рассматривая тр-ки ABC и AEC, у которых вершина A общая, следовательно, и общая высота, а основания $BC=a$ и $EC=b$, заключаем, что $\frac{\text{площ. тр-ка } ABC}{\text{площ. тр-ка } AEC}=\frac{a}{b}$, откуда площадь $ABC=$ $=$ площ. $AEC\,.\,\frac{a}{b}$.

Но площадь тр-ка AEC со сторонами $AC=EC=b$, $AE=\frac{t(a+b)}{a}$ и высотой $CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{AC^2-\left(\frac{AE}{2}\right)^2}=$

$=\sqrt{b^2-\frac{t^2(a+b)^2}{4a^2}}$, — равна $\frac{AE\,.\,CF}{2}=$

$=\frac{t(a+b)}{2a}\sqrt{b^2-\frac{t^2(a+b)^2}{4a^2}}=\frac{t(a+b)}{4a^2}\sqrt{4a^2b^2-t^2(a+b)^2}$.

Искомая площадь тр-ка ABC равна площ. тр-ка $AEC\,.\,\frac{a}{b}$, или

$\frac{t(a+b)}{4a^2}\sqrt{4a^2b^2-t^2(a+b)^2}\cdot\frac{a}{b}=\frac{t(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-t^2(a+b)^2}$.

2-й способ. Пусть $BD=a_1$, $AD=b_1$.

На основании свойства биссектрисы, имеем: $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}$ или

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$ (1).

Величина биссектрисы равна (зад. 695 : $t^2=ab-a_1b_1$ (2). Разрешая систему ур-ий (1) и (2), получим отрезки a_1 и b_1, а, следовательно, и длину 3-й стороны $AB=a_1+b_1$ тр-ка ABC.

По 3 сторонам (a, b и a_1+b_1) тр-ка определяем площадь его на основании формулы: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

833. Пусть $AD=a$, $BC=b$, при чем $\frac{AD}{EF}=\frac{EF}{BC}$, или $\frac{a}{EF}=\frac{EF}{b}$, откуда $EF=\sqrt{ab}$. Для подобия многоугольников необходимо, чтобы углы были соответственно равны, а соответственные, сходственно расположенные, стороны пропорциональны.

Углы трапеции $AEFD$ и $EBCF$ равны, вследствие параллельности прямых AD, EF и BC, пересекаемых двумя прямыми AB и CD ($\angle EAD=\angle BEF$, $\angle BCF=\angle EFD$ и т. д.).

Отношение двух бóльших оснований трапеций $AEFD$ и $EBCF$ $\frac{AD}{EF}=\frac{a}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Надо доказать, что и отношение остальных сторон трапеций $AEFD$ и $EBCF$ тоже равно $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Для доказательства продолжим стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке G. Тр-ки ADG, EFG и BCG подобны, вследствие параллельности прямых AD, EF и BC. Пусть $AE = x$, $EB = y$, $BG = z$.

Из подобия тр-ков ADG и EFG имеем: $\frac{AG}{EG} = \frac{AD}{EF}$, или $\frac{x+y+z}{y+z} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$ (1); из подобия тр-ков EFG и BCG: $\frac{EG}{BG} = \frac{EF}{BC}$, или $\frac{y+z}{z} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ (2). Из пропорции (1) получаем такую производную пропорцию: $\frac{(x+y+z)-(y+z)}{y+z} = \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$, или $\frac{x}{y+z} = \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$ (3); из пропорции (2) — производную пропорцию: $\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{ab}-b}{b}$ (4). Разделив пропорцию (3) на (4), получим $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y+z} = \frac{(a-\sqrt{ab})b}{(\sqrt{ab}-b)\sqrt{ab}}$ или $\frac{x}{y} = \frac{y+z}{z} \cdot \frac{(a-\sqrt{ab})b}{(\sqrt{ab}-b)\sqrt{ab}}$; подставив в эту пропорцию вместо $\frac{y+z}{z}$ значение из равенства (2), получим

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \cdot \frac{(a-\sqrt{ab})b}{(\sqrt{ab}-b)\sqrt{ab}} = \frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Итак, отношение $\frac{AE}{EB} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{AD}{EF}$.

Отношение $\frac{DF}{CF} = \frac{AE}{EB}$, так как стороны угла рассекаются тремя параллельными прямыми на части пропорциональные, или $\frac{DF}{CF} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Отношение меньших оснований $\frac{EF}{BC} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

834. Продолжим перпендикуляр OE до пересечения с AD. Прямоугольные тр-ки OBK и ODL равны между собой, так как $OB = OD$ (диагонали взаимно делятся пополам), а $\angle BOK = \angle DOL$, как вертикальные; следовательно, $BK = LD$, а значит, и $KC = AL$. Пусть $BK = LD = x$, $KC = AL = y$.

Тр-ки AEL и EBK подобны, а потому напишем: $\frac{BK}{AL} = \frac{EB}{AE}$, или $\frac{x}{y} = \frac{115}{135}$ ($AE = AB + BE = 20 + 115 = 135$). Но $BK + KC = BC$,

т.-е. $x + y = 30$; из этих ур-ий определим x и y, именно $x = 13{,}8$, $y = 16{,}2$.

Опустив перпендикуляр BF, найдем из тр-ка ABD сторону BD (меньшая диагональ параллелограма $ABCD$):

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AF$ (где $AF = AL - FL = y - x = 16{,}2 - 13{,}8 = 2{,}4$), или $BD^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 2{,}4 = 1156$, откуда

$$BD = \sqrt{1156} = 34.$$

Диагональ AC получится из уравнения $2 \cdot 30^2 + 2 \cdot 20^2 = 34^2 + AC$ (в параллелограме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон), откуда $AC = \sqrt{2 \cdot 30^2 + 2 \cdot 20^2 - 34^2} = \sqrt{1444} = 38$.

Можно также определить диагональ AC, как „квадрат стороны, лежащей против тупого угла и т. д.“ из тр-ка ACD, для чего надо опустить высоту CG на продолжение AD. Получим:

$AC^2 = 30^2 + 20^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2{,}4 = 1444$, откуда $AC = \sqrt{1444} = 38$.

835. Продолжим две стороны 4-угольника, напр., AB и CD, до взаимного пересечения в точке M. Получились подобные тр-ки AMD и BMC, так как у обоих угол M — общий, а $\angle ADM = \angle MBC$, ибо $\angle ADC + \angle ABC = 2d$ (сумма противоположных углов вписанного 4-угольника) и $\angle MBC + \angle ABC = 2d$ (углы смежные).

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $BM = x$, $MC = y$ $AM = AB + BM = a + x$, $DM = CD + MC = c + y$.

Из подобия тр-ков AMD и BMC имеем: $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{BC}$, или $\frac{a+x}{y} = \frac{d}{b}$ (1) и $\frac{DM}{BM} = \frac{AD}{BC}$, или $\frac{c+y}{x} = \frac{d}{b}$ (2). Решив систему ур-ий (1) и (2), найдем: $x = \frac{b(ab+cd)}{d^2 - b^2}$ и $y = \frac{b(bc+ad)}{d^2 - b^2}$.

Отношение площадей подобных тр-ков равно отношению квадратов сходственных сторон. Следовательно, $\frac{\text{пл. } AMD}{\text{пл. } BMC} = \frac{d^2}{b^2}$, или, составив производную пропорцию: $\frac{\text{пл. } AMD - \text{пл. } BMC}{\text{пл. } BMC} = \frac{d^2 - b^2}{b^2}$, откуда: пл. AMD — пл. $BMC = \frac{\text{пл. } BMC(d^2 - b^2)}{b^2}$. Но пл. AMD — пл. BMC и есть искомая площадь 4-угольника $ABCD$. Значит, пл. $ABCD = \text{пл. } BMC \cdot \frac{(d^2 - b^2)}{b^2}$.

Площадь тр-ка BMC определим по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где сторонами будут:

$$BC = b,\ BM = x = \frac{b(ab+cd)}{d^2-b^2},\ CM = y = \frac{b(bc+ad)}{d^2-b^2},$$

$$p = \frac{BC+BM+CM}{2} = \frac{(a-b+c+d)b}{2(d-b)}.$$

Искомая площадь 4-угольника $ABCD = S \cdot \frac{d^2-b^2}{b} =$

$= {}^1/_4\sqrt{(a-b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(b+c+d-a)}$; принимая $a+b+c+d = 2p_1$, перепишем последнюю формулу так: площ. $ABCD = \sqrt{(p_1-a)(p_1-b)(p_1-c)(p_1-d)}$.

Примечание. При вычислении площади тр-ка BMC сложные дроби сокращать на $d+b$ или $d-b$.

836. Проведем радиус OA в точку касания и опустим перпендикуляр OD на секущую BC.

Тр-к AOB, у которого катеты $OA = AB = r$, равнобедренный; следовательно, $\angle ABO = 45°$; гипотенуза $OB = r\sqrt{2}$.

В прямоугольном тр-ке ODB угол $OBD = \angle ABO - \angle ABC =$ $= 45° - 15° = 30°$, а потому (зад. 67) $OD = \frac{OB}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$,

$$BD = \frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{6}.$$

Проведем радиус OC. Из прямоугольного тр-ка OCD определяем катет $CD = \sqrt{OC^2-OD^2} = \sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$.

Искомая длина секущей $BC = BD + CD = \frac{r}{2}\sqrt{6} + \frac{r}{2}\sqrt{2} =$

$= \frac{r}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

837. Дано $AB = c = 10$ *см*, $BC = a = 17$ *см* и $AC = b = 21$, кроме того $BD^2 = AD \cdot DC$.

Обозначим $AD = x$, тогда $DC = AC - AD = b - x = 21 - x$, и данное равенство примет вид: $BD^2 = x(b-x) = x(21-x)$ (1).

Найдем BD^2 из тр-ка ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE =$ $= c^2 + x^2 - 2x \cdot AE$ (2).

Для равенства (2) определим AE из тр-ка ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AE$, откуда $AE = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AC} =$

$$= \frac{c^2+b^2-a^2}{2b} = \frac{10^2+21^2-17^2}{2\cdot 21} = 6\ \textit{см}.$$

Подставим значение $AE = 6$ в ур-ие (2): $BD^2 = c^2 + x^2 - 2x \cdot AE = 10^2 + x^2 - 12x$.

Сравнив последнее выражение с уравнением (1), напишем: $x(21 - x) = 10^2 + x^2 - 12x$ или $2x^2 - 33x + 100 = 0$. Решив полученное квадратное ур-ие, получим $x_1 = 12\frac{1}{2}$ *см*, $x_2 = 4$ *см*.

В общем виде выражение по сравнении ур ий (1) и (2), напишется так: $x(b - x) = c^2 + x^2 - 2x \cdot AE$, или $2x^2 - x(b + 2AE) + c^2 = 0$.

Отсюда для вещественности корня необходимо, чтобы $(b + 2AE)^2 \geqslant 4 \cdot 2 \cdot c^2$ (в формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, общего вида квадратного ур-ия $ax^2 + bx + c = 0$, для вещественности корня необходимо, чтоб $b - 4ac \geqslant 0$), или $(b + 2AE)^2 \geqslant 8c^2$.

838. Опустим высоту CE и перпендикуляр MF на основание AD.

По условию, площадь трапеции $ABCD$ вдвое больше площади тр-ка AMD, т.-е. $\frac{AD + BC}{2} \cdot CE : \frac{AD \cdot MF}{2} = 2$, или

$$\frac{a + b}{2} \cdot CE : \frac{a}{2} \cdot MF = 2, \text{ откуда } \frac{CE}{MF} = \frac{2a}{a + b} \quad (1).$$

Тр-ки CED и MFD подобны, так как $CE \parallel MF$; мы напишем: $\frac{CD}{MD} = \frac{CE}{MF}$, или $\frac{CD}{MD} = \frac{2a}{a + b}$, на основании равенства (1), и составим производную пропорцию: $\frac{CD - MD}{MD} = \frac{2a - (a + b)}{a + b}$, или $\frac{CM}{MD} = \frac{a - b}{a + b}$.

839. Из точки M внутри угла $KCL = 60°$ опущены перпендикуляры $MA = a$ и $MB = b$.

В 4-угольнике $MACB$ три угла известны: 90°, 90°, 60°; следовательно, 4-й угол AMB равен дополнению до $4d$, т.-е. равен $360° - (90° + 90° + 60°) = 120°$. Вокруг 4-угольника $ACMB$ можно описать окружность, ибо сумма противоположных углов равна $2d$.

Хорда AB, стягивающая дугу AMB в 120°, может быть рассматриваема, как сторона правильного вписанного треугольника, и равна $r\sqrt{3}$.

Из тр-ка ABM имеем: $AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2AM \cdot MN$; $MN = \frac{MB}{2} = \frac{b}{2}$ (в прямоугольном тр-ке BMN угол $BMN = 180° - 120° = 60°$, $\angle MBN = 30°$, см. зад. 67). Следовательно, ур-ие перепишется так: $3r^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot \frac{b}{2}$, откуда $r = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}$.

Но искомое расстояние CM равно диаметру, так как на него опирается вписанный прямой угол. Значит,

$$CM = 2r = 2\sqrt{{}^1/_3\,(a^2 + ab + b^2)}.$$

840. Пусть $EF = f$, $OM = k$, $ON = g$.

Прямая EF в точке O делится пополам (зад. 821), т.-е. $OE = OF = \frac{f}{2}$.

Высота трапеции $MN = OM + ON = k + g$. Основание AD определится из подобия тр-ков ACD и COF, при чем высоты их соответственно равны $k + g$ и k. Имеем: $\frac{AD}{OF} = \frac{k+g}{k}$ (сходственные стороны пропорциональны высотам), откуда

$$AD = \frac{OF(k+g)}{k} = \frac{f(k+g)}{2k}.$$

Основание BC так же определится из подобия тр-ков ABC и AOE, при чем их высоты: $k + g$ и g. Имеем: $\frac{BC}{OE} = \frac{k+g}{g}$,

$$\text{откуда } BC = \frac{OE(k+g)}{g} = \frac{f(k+g)}{2g}.$$

Искомая площадь трапеции равна:

$$\frac{AD + BC}{2} \cdot MN = \frac{1}{2}\left[\frac{f(k+g)}{2k} + \frac{f(k+g)}{2g}\right](k+g) = \frac{f(k+g)^3}{4kg}.$$

841. Пусть MN делит площадь тр-ка ABC пополам.

Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $MC = x$, $NC = y$, $AM = b - x$, $BN = a - y$, $MN = z$.

Имеем: $MC + NC + MN = AM + MN + BN + AB$, или $x + y + z = b - x + z + a - y + c$, откуда $x + y = \frac{a+b+c}{2}$, или (обозначив $a + b + c = 2p$) $x + y = p$ (1).

Площади 2-х тр-ков, содержащих по равному углу, относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол; тр-ки ABC и MNC имеют общий угол C и их площади относятся:

$\frac{ABC}{MNC} = \frac{AC \cdot BC}{MC \cdot NC} = \frac{ab}{xy}$; но, по условию, $\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } MNC} = 2$;

следовательно, $\frac{ab}{xy} = 2$, отк уда $xy = \frac{ab}{2}$ (2).

По сумме и произведению корней—ур-ия (1) и (2)—составим квадратное ур-ие: $t^2 - pt + \frac{ab}{2} = 0$.

Решив это ур-ие, найдем $t = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2ab}}{2}$.

Примечание. Ур-ия $x + y = \frac{a+b+c}{2}$ и $xy = \frac{ab}{2}$; видим, что неизвестные x и y обратимы, т.-е. могут быть заменены одно другим.

Примеры: 1) $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+12+9}{2} = 13$;

$t = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 2 \cdot 5.12}}{2}$; $x = 10$, $y = 3$, или $x = 3$, $y = 10$.

2) $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+8+7}{2} = 12$; $t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8}}{2}$; $x = y = 6$.

842. 1 й способ. Опустим перпендикуляры KC и CL на радиусы OA и OB.

Прямоугольные тр-ки OAB, ODE, KDC и CLE — равнобедренные, острые углы равны по 45°.

Пусть радиус круга r, $KC = KD = a$, $CL = LE = b$.

Из прямоугольного тр-ка OAB имеем: $AB^2 = 2r^2$ (1). Из прямоугольного тр-ка KDC имеем: $DC^2 = 2a^2$, из тр-ка CLE имеем: $CE^2 = 2b^2$. Сложим последние 2 равенства: $DC^2 + CE^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$. Но $a^2 + b^2 = r^2$ (из прямоугольного тр-ка COL, где $OL = KC = a$, $CL = b$). Следовательно, $DC^2 + CE^2 = 2r^2$ (2). Из равенств (1) и (2) следует: $DC^2 + CE^2 = AB^2$.

2-й способ. Отрежем тр-к OCD и пристроим его в положении OC_1E; OD совпадет с OE, так как они, как катеты равнобедренного прямоугольного тр-ка ODE, равны (OAB — равнобедренный тр-к, а $DE \parallel AB$),

Угол CEC_1, очевидно, равен 90°, ибо сложен из углов $OED = 45°$ и $OEC_1 = ODC = 45°$. Угол COC_1 тоже равен 90°, ибо состоит из прежних частей прямого угла DOE.

Из прямоугольного тр-ка AOB имеем: $AB^2 = 2r^2$ (1); из прямоугольного тр-ка COC_1 имеем: $CC_1^2 = 2r^2$; из прямоугольного тр-ка CEC_1: $C_1E^2 + CE^2 = CC_1^2 = 2r^2$; но $C_1E = DC$, а потому $DC^2 + CE^2 = 2r^2$ (2). Из равенств (1) и (2) следует: $DC^2 + CE^2 = AB^2$.

843. Площадь тр-ка определяется по формуле

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; в данном случае,

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{39+17+28}{2} = 42$; следовательно,

$S = \sqrt{42(42-39)(42-17)(42-28)} = \sqrt{42 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 14} = 210$.

Радиус описанного круга найдем по формуле:

$$R = \frac{abc}{4.S} = \frac{39.17.28}{4.210} = 22{,}1.$$

Радиус вписанного внутреннего круга равен $r = \frac{S}{p}$ (из формулы $S = pr$) $= \frac{210}{42} = 5$.

Радиус вписанного внешнего круга находится по формуле: $R_a = \frac{S}{p-a}$. Докажем эту теорему.

Пусть радиус вневписанного круга (угла A) — R_a.

Площадь тр-ка ABC рассматриваем, как сумму площадей тр-ков $AOB + AOC$ без площади тр-ка BOC, т.-е.

$$\frac{AB.OL}{2} + \frac{AC.OK}{2} - \frac{BC.OM}{2}, \text{ или}$$

$$\frac{c.R_a}{2} + \frac{b.R_a}{2} - \frac{a.R_a}{2} = \frac{R_a}{2}(c + b - a) =$$

$$= \frac{R_a}{2}(a + b + c - 2a) = \frac{R_a}{2}(2p - 2a) = R_a(p - a):$$

значит, $S = R_a(p - a)$, откуда $R_a = \frac{S}{p-a}$ (1).

$$R_a = \frac{S}{p-a} = \frac{210}{3} = 70;\ R_b = \frac{S}{p-b} = \frac{210}{25} = 8{,}4;$$

$$R_c = \frac{S}{p-c} = \frac{210}{14} = 15.$$

844. Пусть стороны тр-ка ABC будут: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Касательные, проведенные из одной точки, равны между собою. Обозначим касательные из вершины A тр-ка ABC через a_1, из вершины B через b_1, из вершины C через c_1.

Пусть $AK = AL = a_1$, $BK = BM = b_1$, $CL = CM = c_1$. Периметр тр-ка ABC равен $2p = 2a_1 + 2b_1 + 2c_1$, а $p = a_1 + b_1 + c_1$; так как $BC = BM + CM$, т.-е. $a = b_1 + c_1$, то $p - a = a_1$.

Таким же образом $p - b = b_1$, $p - c = c_1$.

Искомое расстояние AO найдется из прямоугольного тр-ка AOL, где катет $OL = r = \frac{S}{p}$ (из формулы $S = pr$), а катет $AL = a_1 = p - a$, именно, $AO = \sqrt{r^2 + a_1^2}$.

1) $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$; $r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$;

$a_1 = p - a = 6 - 3 = 3$; $AO = \sqrt{r^2 + a_1^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$;

$b_1 = p - b = 6 - 4 = 2$; $BO = \sqrt{r^2 + b_1^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$;

$c_1 = p - c = 6 - 5 = 1$; $CO = \sqrt{r^2 + c_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Примеч. Тр-к, т. н. египетский, со сторонами 3, 4, 5 (или в отношении 3:4:5) всегда прямоугольный, и задача упрощается, ибо (зад. 701_1) $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1$. Можно, в этом случае, решить задачу, и не прибегая к формуле $a_1 = p - a$, а просто $c_1 = r$; $a_1 = a - r$; $b_1 = b - r$; тогда $OC = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}$,

$OA = \sqrt{r^2 + (a-r)^2} = \sqrt{1^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

$OB = \sqrt{r^2 + (b-r)^2} = \sqrt{1^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$.

2) $p = \frac{26+25+17}{2} = 34$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{34(34-26)(34-25)(34-17)} = \sqrt{34 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17} = 204$;

$r = \frac{S}{p} = \frac{204}{34} = 6$; $a_1 = p - a = 34 - 26 = 8$.

$AO = \sqrt{r^2 + a_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

$b_1 = p - b = 34 - 25 = 9$; $BO = \sqrt{r^2 + b_1^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$;

$c_1 = p - c = 34 - 17 = 17$; $CO = \sqrt{r^2 + c_1^2} = \sqrt{6^2 + 17^2} = \sqrt{325}$.

† **845.** В зад. 843 выведена формула $R_a = \frac{S}{p-a}$, $R_b = \frac{S}{p-b}$, $R_c = \frac{S}{p-c}$. Перемножив почленно эти 3 равенства, получим:

$R_a \cdot R_b \cdot R_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{S^3 \cdot p \cdot r}{p(p-a)(p-b)(p-c) \cdot r} =$

$= \frac{S^3 \cdot S}{S^2 r} = \frac{S^2}{r}$ ($S = pr$ и $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Из равенства $R_a \cdot R_b \cdot R_c = \frac{S^2}{r}$ получаем: $S = \sqrt{r \cdot R_a \cdot R_b \cdot R_c}$ (1).

Представим равенства $R_a = \frac{S}{p-a}$, $R_b = \frac{S}{p-b}$, $R_c = \frac{S}{p-c}$ в виде $\frac{1}{R_a} = \frac{p-a}{S}$, $\frac{1}{R_b} = \frac{p-b}{S}$, $\frac{1}{R_c} = \frac{p-c}{S}$; сложим их и под-

ставим pr вместо S; получим: $\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}=\frac{1}{pr}$ $(p-a+p-b+p-c)=\frac{1}{pr}$ $[3p-(a+b+c)]=\frac{1}{pr}(3p-2p)=\frac{1}{r}$ (так как $a+b+c=2p$) (2).

Применяя формулу (2), найдем r, именно: $\frac{1}{66}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{r}$, или $\frac{24.8+66.8+66.24}{66.24.8}=\frac{1}{r}$, откуда $r=\frac{11}{2}$ *см* (арифметические дроби можно сложить и проще, при общем знаменателе $11.3.8=264$).

Формула (1) дает, при замене S на pr, следующие ур-ия: $S=pr=\sqrt{r.R_a.R_b.R_c}$, т.-е. 1) $p.{}^{11}/_{2}=\sqrt{{}^{11}/_{2}.66.24.8}$, откуда

$$p=48\ см,\ \text{и 2)}\ S=\sqrt{{}^{11}/_{2}.66.24.8}=264\ см^2.$$

Искомый радиус описанного круга найдем по формуле $R=\frac{abc}{4S}$, для чего a, b, c определим так. Имеем (зад. 843): $R_a=\frac{S}{p-a}$, или $66=\frac{264}{48-a}$, откуда $a=44$ *см*; $R_b=\frac{S}{p-b}$, или $24=\frac{264}{48-b}$, откуда $b=37$ *см*; $R_c=\frac{S}{p-c}$, или $8=\frac{264}{48-c}$, откуда $c=15$ *см*. Следовательно, $R=\frac{abc}{4S}=\frac{44.37.15}{4.264}=23{,}125$ *см*.

846. В равнобедренном тр-ке радиусы кругов описанного и вписанного лежат на высоте, делящей основание пополам: $AK=KC=\frac{AC}{2}=\frac{12}{2}=6$ *м*. Касательные, проведенные из одной точки, равны, т.-е. $AL=AK=6$ *м*; $BL=AB-BL=9-6=3$ *м*.

Отрезок LM определим из подобия тр-ков ABC и LBM, именно: $\frac{LM}{AC}=\frac{BL}{AB}$, или $\frac{LM}{12}=\frac{3}{9}$, откуда $LM=4$ *м*.

Имеем равенство (произведение отрезков хорд, пересекающихся в одной точке внутри круга, есть величина постоянная): $AL.LB=DL.LE$; но $AL=6$ *м*, $LB=3$ *м*; кроме того обозначим $DL=x$, $LE=LM+ME=4$ *м* $+x$ ($ME=DL$); пропорция перепишется так: $6.3=x(4+x)$, или $x^2+4x-18=0$.

Решив полученное квадратное ур-ие, получим: $x=\sqrt{22}-2$.

Искомая хорда $DE=DL+LM+ME=x+4+x=2\sqrt{22}=\sqrt{88}=9{,}38\ldots$ *м*.

847. Высотой CD прямоугольный тр-к ABC делится на тр-ки ACD и BCD, подобные между собою и тр-ку ABC. Пусть периметр $ACD = M$, а периметр $BCD = N$. Обозначим катеты $BC = a$, $AC = b$, гипотенузу $AB = c$, периметр тр-ка $ABC = P$.

Периметры подобных тр-ков относятся, как сходственные стороны.

Из подобия тр-ков ACD и ABC имеем: $\frac{M}{P} = \frac{b}{c}$ (1).

Из подобия тр-ков BCD и ABC имеем: $\frac{N}{P} = \frac{a}{c}$ (2).

Возведем в квадрат ур-ия (1) и (2) и сложим их:

$$\frac{M^2}{P^2} + \frac{N^2}{P^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}, \text{ или } \frac{M^2 + N^2}{P^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad (3).$$

($a^2 + b^2 = c^2$, т.-е. сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы).

Равенство (3) перепишем так: $P^2 = M^2 + N^2$, откуда $P = \sqrt{M^2 + N^2}$.

848. 1) Пусть радиус окружностей, проведенных через точки деления, равен r_1. Рассматривая тр-к OO_1O_2 замечаем, что $\angle O = 60°$, $OO_1 = OO_2$, т.-е и углы O_1 и O_2 равны между собой, следовательно, $\angle O_1 = \angle O_2 = 60°$, а $OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = 2r_1$ ($O_1O_2 = O_1D + O_2D = 2r_1$, ибо линия центров внешне касающихся окружностей равна сумме их радиусов). В равностороннем тр-ке высота равна $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (a — сторона тр-ка), т.-е. $OD = \frac{O_1O_2}{2}\sqrt{3}$, или $r = \frac{2r_1}{2}\sqrt{3} = r_1\sqrt{3}$, откуда $r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Искомая площадь фигуры $ABCDEF$, ограниченной внутренними дугами AB, BC и т. д., равна площади правильного вписанного 6-угольника $ABCDEF$ без суммы площадей 6 равных сегментов CLD, DME и т. д.

Площадь правильного вписанного 6-угольника равна сумме площадей 6 правильных тр-ков, площадь одного из которых $OCD = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$, т.-е. равна $6 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$.

Площадь сегмента CLD равна площади сектора CO_1D (с углом $CO_1D = 120°$, ибо из прямоугольного тр-ка OO_1D с углом $O_1OD = \angle \frac{COD}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$ следует, что $\angle OO_1D = 60°$, а $\angle C_1OD = 2 \cdot \angle OO_1D = 120°$) без площади равнобедренного тр-ка CO_1D с углом в 120°.

Площадь сектора CO_1D равна $\frac{\pi r_1^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r_1^2}{3} = \frac{\pi r^2}{3 \cdot 3} = \frac{\pi r^2}{9}$; площадь равнобедренного тр-ка CO_1D равна $\frac{CD \cdot O_1S}{2}$, но $CD = a_3 = r_1\sqrt{3}$, $O_1S = \frac{O_1C}{2}$ (зад. 67, $\angle O_1CS = 30^\circ$) $= \frac{r_1}{2}$. Следовательно, $\frac{CD \cdot O_1S}{2} = \frac{r_1\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r_1}{2} = \frac{r_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{r^2\sqrt{3}}{12}$; площадь сегмента CLD равна $\frac{\pi r^2}{9} - \frac{r^2\sqrt{3}}{12}$; сумма же площадей шести таких сегментов равна $6\left(\frac{\pi r^2}{9} - \frac{r^2\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.

Искомая площадь фигуры $ABCDEF$ равна:

$$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3} - \left(\frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{r^2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 2r^2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi r^2 = \frac{2}{3}r^2(3\sqrt{3} - \pi).$$

2) Отношение площадей кругов равно отношению квадратов их радиусов. Радиус круга $ABCDEF$ равен r, а радиус OL круга $KLMNPQ$ равен $OO_1 - O_1L = 2r_1 - r_1 = r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

Итак, искомое отношение площадей кругов равно:

$$\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 : r^2 = 1 : 3.$$

849. Гипотенуза $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ *см*. Высота CD определится из равенства $AC \cdot BC = AB \cdot CD$ (сравнение формул для площади), откуда $CD = BC \cdot \frac{AC}{AB} = 8 \cdot \frac{15}{17}$ *см*.

Перпендикуляр ED к катету AC определится таким образом. Из подобия прямоугольных тр-ков ACD и ABC (угол A — общий) следует: $\frac{DE}{CD} = \frac{AC}{AB}$ (сходственные высоты пропорциональны сторонам), или $\frac{DE}{CD} = \frac{15}{17}$, откуда $DE = CD \cdot \frac{15}{17}$ *см*, т.-е. каждый последующий перпендикуляр равен предыдущему, умноженному на множителя $^{15}/_{17}$.

Итак, $BC = 8$, $CD = 8 \cdot {}^{15}/_{17}$, $DE = 8 \cdot ({}^{15}/_{17})^2$ и т. д.

Предел ломанной линии $BCDEFG\ldots$ есть сумма линий $BC + CD + DE\ldots$, представляющая собой предел суммы бесконечно-убывающей кратной прогрессии, у которой 1-й член равен 8, а знаменатель прогрессии $^{15}/_{17}$, т.-е.

$$8 + 8 \cdot {}^{15}/_{17} + 8 \cdot ({}^{15}/_{17})^2 \ldots = 8 : (1 - {}^{15}/_{17}) = 68 \text{ см.}$$

850. 1) Пусть катеты и гипотенузы выражены: $a - d$, a, $a + d$; тогда имеем зависимость между ними: $(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2$, откуда $a^2 = 4ad$, или $a = 4d$.

Следовательно, стороны данного тр-ка могут быть представлены так: $3d$, $4d$, $5d$, соотношение которых и есть $3 : 4 : 5$.

2) Пусть катеты и гипотенуза выражены: a, ar и ar^2; следовательно, можем написать: $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$.

Отношение отрезков гипотенузы равно отношению квадратов катетов. Пусть эти отрезки p и q; тогда $\frac{p}{q} = \frac{(ar)^2}{a^2} = \frac{r^2}{1}$ (1); составляя производную пропорцию, получим $\frac{p+q}{p} = \frac{r^2+1}{r^2}$ или $\frac{ar^2}{p} = \frac{r^2+1}{r^2}$ (ибо p и q отрезки гипотенузы ar^2), откуда $p = \frac{r^2}{1+r^2} \cdot ar^2$; но из равенства $a^2 + (ar)^2 = (ar^2)^2$ получаем: $1 + r^2 = r^4$;

следовательно, $p = \frac{r^2}{1+r^2} \cdot ar^2 = \frac{r^2}{r^2} \cdot ar^4 = a$ (2).

Надо доказать, что $\frac{ar^2}{p} = \frac{p}{q}$ (3).

Подставив в левую часть (3) a вместо p, согласно (2), получим $\frac{ar^2}{p} = \frac{ar^2}{a} = r^2$; но по равенству (1) и правая часть $\frac{p}{q} = r^2$. Следовательно, равенство (3) справедливо.

Того-же автора:

РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ К СБОРНИКУ РЫБКИНА

ч. I в. I (зад. 1-468) ц. 1 р. 40 к.

Цена 1 р. 80 к.
с атласом чертежей

С ЗАКАЗАМИ ОБРАЩАТЬСЯ:

1) Книжный магазин Отлоблиза. Киев, ул. Ленина, 24
2) Книжный магазин «Космос». Киев, ул. Короленко, 53

2011110202